DISEÑO DE SITUACIONES PARA EL TRABAJO CON FIGURAS GEOMÉTRICAS BASADO EN LAS OPERACIONES COGNITIVAS DE CONSTRUCCIÓN, VISUALIZACIÓN Y RAZONAMIENTO

Jorge Enrique Galeano Cano

UNIVERSIDAD DEL VALLE

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN ÉNFASIS EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

2015

DISEÑO DE SITUACIONES PARA EL TRABAJO CON FIGURAS GEOMÉTRICAS BASADO EN LAS OPERACIONES COGNITIVAS DE CONSTRUCCIÓN, VISUALIZACIÓN Y RAZONAMIENTO

Jorge Enrique Galeano Cano

1303721

Informe final presentado como requisito parcial para optar al título de Magister en Educación, énfasis en Educación Matemática

Dirigido por Myriam B. Vega Restrepo

UNIVERSIDAD DEL VALLE

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN ÉNFASIS EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

2015

A Marina

Gracias a la Universidad del Valle, a sus profesores, a mis estudiantes,

a los profesores del área de Educación Matemática,

al colegio Jefferson.

A la profesora Myriam B. Vega, mi admiración y respeto.

AUTORIZACIÓN PARA PUBLICACIÓN DIGITAL DE OBRAS

PARTE 1. Términos de la licencia general para publicación digital de obras en el repositorio institucional de Acuerdo a la Política de Propiedad Intelectual de la Universidad del Valle

Actuando en nombre propio los AUTORES o TITULARES del derecho de autor confieren a la UNIVERSIDAD DEL VALLE una Licencia no exclusiva, limitada y gratuita sobre la obra que se integra en el Repositorio Institucional, que se ajusta a las siguientes características:

a) Estará vigente a partir de la fecha en que se incluye en el Repositorio, por un plazo de cinco (5) años, que serán prorrogables indefinidamente por el tiempo que dure el derecho patrimonial del AUTOR o AUTORES. El AUTOR o AUTORES podrán dar por terminada la licencia solicitando por escrito a la UNIVERSIDAD DEL VALLE con una antelación de dos (2) meses antes de la correspondiente prórroga.

b) El AUTOR o AUTORES autorizan a la UNIVERSIDAD DEL VALLE para que en los términos establecidos en el Acuerdo 023 de 2003 emanado del Consejo Superior de la Universidad del Valle, la Ley 23 de 1982, Ley 44 de 1993, Decisión Andina 351 de 1993 y demás normas generales sobre la materia, publique la obra en el formato que el Repositorio lo requiera (impreso, digital, electrónico, óptico, usos en red o cualquier otro conocido o por conocer) y conocen que dado que se publica en Internet por este hecho circula con un alcance mundial.

c) El AUTOR o AUTORES aceptan que la autorización se hace a título gratuito, por lo tanto renuncian a recibir emolumento alguno por la publicación, distribución, comunicación pública y cualquier otro uso que se haga en los términos de la presente Licencia y de la ***Licencia Creative Commons*** con que se publica.

d) El AUTOR o AUTORES manifiestan que se trata de una obra original y la realizó o realizaron sin violar o usurpar derechos de autor de terceros, obra sobre la que tiene (n) los derechos que autoriza (n) y que es él o ellos quienes asumen total responsabilidad por el contenido de su obra ante la UNIVERSIDAD DEL VALLE y ante terceros. En todo caso la UNIVERSIDAD DEL VALLE se compromete a indicar siempre la autoría incluyendo el nombre del AUTOR o AUTORES y la fecha de publicación. Para todos los efectos la UNIVERSIDAD DEL VALLE actúa como un tercero de buena fé.

e) El AUTOR o AUTORES autorizan a la UNIVERSIDAD DEL VALLE para incluir la obra en los índices y buscadores que estimen necesarios para promover su difusión. El AUTOR o AUTORES aceptan que la UNIVERSIDAD DEL VALLE pueda convertir el documento a cualquier medio o formato para propósitos de preservación digital.

SI EL DOCUMENTO SE BASA EN UN TRABAJO QUE HA SIDO PATROCINADO O APOYADO POR UNA AGENCIA O UNA ORGANIZACIÓN, CON EXCEPCIÓN DE LA UNIVERSIDAD DEL VALLE, LOS AUTORES GARANTIZAN QUE SE HA CUMPLIDO CON LOS DERECHOS Y OBLIGACIONES REQUERIDOS POR EL RESPECTIVO CONTRATO O ACUERDO.

VICERRECTORIA ACADÉMICA
División de Bibliotecas

AUTORIZACIÓN PARA PUBLICACIÓN DIGITAL DE OBRAS

PARTE 2. Autorización para publicar y permitir la consulta y uso de obras en el Repositorio Institucional.

Con base en este documento, Usted autoriza la publicación electrónica, consulta y uso de su obra por la UNIVERSIDAD DEL VALLE y sus usuarios de la siguiente manera;

a. Usted otorga **una (1) licencia especial para publicación de obras en el repositorio institucional de la UNIVERSIDAD DEL VALLE** (Parte 1) que forma parte integral del presente documento y de la que ha recibido una (1) copia.

Si autorizo ☑ No autorizo ☐

b. Usted autoriza para que la obra sea puesta a disposición del público en los términos autorizados por Usted en los literales a), y b), con la ***Licencia Creative Commons Reconocimiento - No comercial - Sin obras derivadas 2.5 Colombia*** cuyo texto completo se puede consultar en http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.5/co/ y que admite conocer.

Si autorizo ☑ No autorizo ☐

Si Usted no autoriza para que la obra sea licenciada en los términos del literal b) y opta por una opción legal diferente descríbala[1]:

En constancia de lo anterior,

Título de la obra: DISEÑO DE SITUACIONES PARA EL TRABAJO CON FIGURAS GEOMÉTRICAS BASADO EN LAS OPERACIONES COGNITIVAS DE CONSTRUCCIÓN, VISUALIZACIÓN Y RAZONAMIENTO

Autores:

Nombre: JORGE ENRIQUE GALEANO CANO Firma: C.C. 94467381

Nombre: Firma: C.C.

Nombre: Firma: C.C.

Fecha: Octubre 30 de 2015

(Si desea una versión digital del formulario, una vez esté diligenciado utilice los programas "pdfcreator" o "Dopdf", los cuales le permitirán convertir el archivo a pdf y así podrá guardarlo)

[1] Los detalles serán expuestos de ser necesario en documento adjunto

F-01-04-05
V-01-2011

Elaborado por Grupo de Trabajo Sistema Documental
División de Bibliotecas

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN
AREA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TRABAJO DE INVESTIGACIÓN

FECHA DE LA SUSTENTACION: Santiago de Cali, 29 de Octubre de 2015
ESTUDIANTE: JORGE ENRIQUE GALEANO CANO - CODIGO: 1303721
TÍTULO DEL TRABAJO DE INVESTIGACIÓN: ***"DISEÑO DE SITUACIONES PARA EL TRABAJO CON FIGURAS GEOMÉTRICAS BASADO EN LAS OPERACIONES COGNITIVAS DE CONSTRUCCIÓN, VISUALIZACIÓN Y RAZONAMIENTO"***
DIRECTOR DE TESIS: Profesor MYRIAM B. VEGA RESTREPO
EVALUADORES: Profesor GUSTAVO A. MARMOLEJO AVENIA Profesor JORGE H. ARCE CHAVES
COMENTARIOS DE LOS JURADOS
APROBADO ___ *APLAZADO* ___ *RECHAZADO* ___

Prof. JAIME HUMBERTO LEIVA DEANTONIO
Subdirector de Investigaciones y Posgrados

Prof. MYRIAM B. VEGA RESTREPO
Director de Tesis

Prof. GUSTAVO A. MARMOLEJO AVENIA
Jurado Evaluador

Prof. JORGE H. ARCE CHAVES
Jurado Evaluador

RESUMEN

Se propone, a partir de una perspectiva semiótica y cognitiva, un trabajo para el desarrollo del pensamiento espacial, en particular, un acercamiento a las figuras geométricas como un modo de ilustrar las posibilidades de una propuesta para la enseñanza de la geometría. Se parte del reconocimiento de tres procesos cognitivos fundamentales para el desarrollo de la actividad geométrica: la visualización, el razonamiento y la construcción. Cada uno de estos procesos tiene condiciones particulares y características que determinan su lugar en el desarrollo del conocimiento geométrico, además requieren de aprendizajes independientes y actividades que permitan avanzar hacia su articulación. Todos estos elementos se conjugaron en el diseño de actividades de clase de geometría en sexto grado, las cuales hacen parte de un diseño experimental que bajo la metodología de Experimentos de Enseñanza fueron aplicadas y analizadas por el equipo de investigación que acompaña este proyecto.

En dicho equipo participan, además de los profesores de la línea de investigación en Lenguaje, Razonamiento y Comunicación de Saberes Matemáticos del Área de Educación Matemática, estudiantes del pregrado en la Licenciatura en Educación Básica con énfasis en Matemáticas y de la Maestría en Educación con énfasis en Educación Matemática.

Se identificaron algunas características para el diseño de situaciones de aprendizaje que favorecen la formación del pensamiento espacial, mediante las actividades cognitivas de construcción, visualización y razonamiento, al inicio de la educación básica secundaria; esto ha de apoyar la formulación de propuestas de trabajo en clase de geometría a partir de la divulgación de los resultados en escenarios de formación de maestros, tanto en las licenciaturas como en diversos programas de cualificación.

PALABRAS CLAVES: Visualización, construcción, razonamiento, geometría, aprendizaje, diseño, experimento de clase.

Contenido

ILUSTRACIONES

TABLAS

INTRODUCCIÓN

La enseñanza de la geometría es uno de los campos de trabajo en educación matemática con mayores necesidades de intervención mediante la investigación. Los resultados de los estudiantes en distintos escenarios de evaluación dejan ver el bajo nivel de logro alcanzado en los aprendizajes escolares. La enseñanza tradicional de la geometría, que alejó a los estudiantes de acercamientos heurísticos y ligados a sus prácticas cotidianas por intentar un acercamiento demasiado formal, el cual privilegiaba los elementos estructurales de la geometría como centro de la enseñanza, ha mostrado su poca efectividad en la construcción de un conocimiento geométrico en los estudiantes que les permita desarrollar habilidades específicas, poseer una comprensión general de sus aplicaciones y ciertas habilidades de razonamiento.

Se propone, a partir de una perspectiva semiótica y cognitiva, un trabajo para el desarrollo del pensamiento espacial, en particular, un acercamiento a las figuras geométricas como un modo de ilustrar las posibilidades de esta propuesta para la enseñanza de la geometría. Se parte del reconocimiento de tres procesos cognitivos fundamentales para el desarrollo de la actividad geométrica: la visualización, el razonamiento y la construcción. Cada uno de estos procesos tiene sus condiciones particulares y unas características que determinan su lugar en la construcción del conocimiento geométrico, además que requieren de aprendizajes independientes y actividades que permitan avanzar hacia su articulación.

Todos estos elementos se conjugaron en el diseño de actividades de clase de geometría en sexto grado del Colegio Jefferson, las cuales hacen parte de un diseño experimental que bajo la metodología de Experimentos de Enseñanza fueron aplicadas y analizadas por el equipo de investigación que acompaña este proyecto, en dicho equipo participan estudiantes del pregrado en la Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas y de la Maestría en la misma línea, además de los profesores de la línea de investigación en Lenguaje, Razonamiento Y Comunicación De Saberes Matemáticos del Área De Educación Matemática.

Se espera con este proyecto determinar las características para el diseño de situaciones de aprendizaje que favorezcan la formación del pensamiento espacial, mediante las actividades cognitivas de construcción, visualización y razonamiento, al inicio de la educación básica secundaria. Esto ha de apoyar la formulación de propuestas de trabajo en clase de geometría a partir de la divulgación de los resultados en escenarios de formación de maestros, tanto en las licenciaturas como en diversos programas de cualificación.

Este trabajo se organizó alrededor de la pregunta *¿De qué manera las actividades cognitivas de construcción, visualización y razonamiento pueden aplicarse en la formulación de una propuesta para el desarrollo del Pensamiento Espacial al inicio de la educación básica secundaria del Colegio Jefferson?* Los elementos teóricos que guiaron el trabajo estuvieron centrados en la propuesta que para el aprendizaje de la geometría ha formulado Raymond Duval, además de un conjunto de posturas teóricas que permitieron avanzar en la comprensión de aspectos curriculares, matemáticos, didácticos y metodológicos, fundamentales para el desarrollo del mismo.

La propuesta metodológica de los Experimentos De Enseñanza y la teoría que se constituyó para sustentar el desarrollo de los aprendizajes en geometría, centraron la atención en el concepto de trayectoria de aprendizaje como el constructo que permite dar sentido al diseño de los Experimentos De Enseñanza. Dicha trayectoria permitió establecer unas metas, unas formas de evolución de los aprendizajes, sustentadas en el desarrollo de las actividades propuestas. Todo esto se fundamentaba en la idea de conjetura, otro concepto central en la propuesta metodológica.

La conjetura permitía establecer una ruta para el proceso que seguían los estudiantes, daba orientaciones en relación con lo que habría que enseñar (dimensión del contenido de la conjetura) y con la forma de enseñarlo (dimensión pedagógica de la conjetura). Para este trabajo se formuló una conjetura general, con sus dos dimensiones, la cual se fue particularizando para cada una de las situaciones que se diseñaron.

Los análisis locales dieron cuenta del avance en las trayectorias de aprendizaje en relación con las características que iba tomando la conjetura. La formulación de las conjeturas se apoyó en tres trabajos de pregrado que exploraron las actividades cognitivas para el aprendizaje de la geometría, desde el diseño de situaciones y el análisis de textos escolares.

El análisis final de la implementación de las situaciones en la clase de geometría dio lugar a la formulación inicial de una nueva trayectoria de aprendizaje, que recoge los resultados de estos análisis y permite hacer recomendaciones en relación con el diseño de nuevas trayectorias para el trabajo en las clases de geometría del colegio.

El presente informe se organizó entonces de la siguiente manera: En el primer capítulo se describen los elementos considerados para el planteamiento del problema de investigación, se formulan los objetivos del mismo y se dan argumentos que sustentan la propuesta de trabajo.

En el segundo capítulo se hace un recorrido por los conceptos y posturas teóricas que orientaron el desarrollo del trabajo; se hace una descripción general de una perspectiva semiótica y cognitiva para el aprendizaje de las matemáticas y de la geometría. A partir de la propuesta curricular del MEN para el desarrollo del pensamiento espacial y la del Colegio Jefferson, se hace una descripción de la geometría escolar que se considera para el trabajo en las clases. Finalmente se hace una propuesta de organización teórica que ha de acompañar tanto el diseño de las actividades como sus análisis posteriores.

El tercer capítulo presenta las características de los experimentos de enseñanza, los cuales determinan la metodología con la que se desarrolló el proyecto. Después se describen las actividades que se diseñaron y las particularidades de su implementación. El cuarto capítulo presenta el análisis de los datos; los resultados obtenidos en dichos análisis se recogen y organizan en términos de una propuesta de trayectoria de aprendizaje, se dan recomendaciones para desarrollos futuros del trabajo.

En la parte final se describen las conclusiones a las que se llegaron con la implementación del experimento de enseñanza, en relación con las posibilidades que para el trabajo en clase de geometría tiene la puesta en juego de una propuesta de enseñanza basada en procesos cognitivos.

CAPÍTULO 1. ASPECTOS GENERALES DEL PROYECTO

En este capítulo se presentan los elementos que permitieron formular el problema de investigación; se hace un recuento de algunas de las características que tiene el trabajo en geometría, las condiciones particulares que este tiene en la educación básica secundaria y se precisan algunos referentes teóricos que lo orientan. Se formulan los objetivos del trabajo, y se dan elementos que permiten acercarse a las razones que justifican su elaboración así como los sustentos sobre los cuales se realiza esta propuesta de trabajo.

1.1 Presentación y contextualización del problema

La Ley 115 de 1994 sentó las bases para un nuevo proceso de transformación de la enseñanza de las matemáticas en el país, entregó a las escuelas la autonomía sobre el desarrollo de sus propuestas de formación, en el marco de un acompañamiento que se ha estado construyendo desde aquel entonces y que se concreta fundamentalmente en los documentos: Lineamientos curriculares de matemáticas (MEN, 1998) y Estándares básicos de competencias (MEN, 2006).

Los maestros colombianos han estado entonces en un proceso de implementación de toda esta nueva perspectiva para la enseñanza de las matemáticas, sin embargo los resultados que están teniendo la mayoría de escuelas del país, a partir de los datos que arrojan las pruebas nacionales, no son satisfactorios: se encuentran desempeños promedio por debajo de los esperados, en lo nacional, regional y local, con algunas acentuaciones en lo rural y en lo público.

Para atender el complejo grupo de dificultades que representa enfrentar dicho proceso, un paso inicial es centrar la reflexión o la práctica sobre uno de los pensamientos, y de ahí sobre algunos de los procesos y sistemas que se les asocia, tal delimitación parece una condición necesaria en la búsqueda de construir alternativas posibles de trabajo. En el caso particular de este trabajo se asume que "…La enseñanza de la geometría es más compleja y con frecuencia menos exitosa que la enseñanza de las operaciones numéricas o el álgebra" (Duval, 2001) como un argumento inicial en la selección de una orientación.

Es en este contexto -el de una escuela que sigue buscando alternativas para el trabajo diario en clases- en el que se formula esta propuesta de incluir reflexiones de orden cognitivo y semiótico en la organización de una parte del currículo escolar de matemáticas: el desarrollo del pensamiento espacial y los sistemas geométricos; se propone, en particular, que las tres actividades cognitivas involucradas en el trabajo con geometría (visualización, construcción y razonamiento) sean el centro de dichas reflexiones. Para el diseño, implementación y evaluación de dicha propuesta, centrada en elementos cognitivos y no únicamente en criterios matemáticos, es necesario resolver algunos interrogantes iniciales que permitan construir y definir los insumos con los que se trabajará.

Inicialmente, se propone una perspectiva semiótico cognitiva del aprendizaje de las matemáticas, como aquella teoría sobre la cual sustentar el diseño de las situaciones propuestas. Además, el diseño y la implementación de las actividades se fundamentan, junto con esta perspectiva en las prácticas pedagógicas del colegio, ya que se asume que el conocimiento que la institución ha construido es un elemento fundamental para la puesta en escena de las actividades, esto ha de tomar particular relevancia en el análisis que se llevará a cabo.

Lo anterior implica ampliar lo señalado más arriba respecto de la naturaleza del trabajo en geometría, en el sentido de asumir (Duval, 2001) que de todos los dominios de conocimiento en los cuales los alumnos deben entrar, la geometría es aquel que exige la actividad cognitiva más compleja; ya que ella se debe construir, razonar y ver, en un complejo entramado de actividades y situaciones problema.

Se requiere entonces poner el acento en las exigencias cognitivas a las que se enfrenta un estudiante en clase de geometría. Estas tienen que ver con la caracterización de los diversos procesos de visualización que dicha actividad impone, la determinación de las condiciones de construcción y exploración de figuras geométricas, y la implementación de situaciones que favorezcan la presentación, análisis y construcción de razonamientos. Se plantea que el estudio de estas exigencias permite establecer condiciones para la formulación de una propuesta de organización de las actividades de clase.

La visualización en matemáticas está relacionada con una actividad cognitiva que es diferente a la requerida en otras áreas de conocimiento, ya que son sólo las representaciones lo que puede verse y que todo parecido entre estas representaciones matemáticas y los objetos reales de la experiencia sensible es fortuito o no pertinente para la actividad matemática propuesta. La misma diferenciación es necesaria para el caso de los enunciados en geometría, no por el conocido eufemismo que asocia a las matemáticas en general y a la geometría en particular, un lenguaje "abstracto", sino por el reconocimiento de un funcionamiento discursivo diferente al comunicar ideas y procedimientos geométricos al requerido en otros intercambios comunicativos por fuera de las matemáticas. Entonces, el tipo de funcionamiento cognitivo de la visualización y el discurso es diferente, sin embargo su articulación es fundamental para el aprendizaje de la geometría ya que el aprendizaje de la geometría descansa sobre dicha articulación.

La geometría es el campo sobre el cual se centran las reflexiones de este trabajo, pero se debe reconocer que el trabajo que con ella se adelanta en la escuela tiene connotaciones particulares y especificaciones precisas respecto de su articulación en una organización curricular. Siguiendo esta perspectiva, se afirma que para el trabajo en los primeros grados no es muy relevante la medición (SEDUCA, 2005), en relación con cuantificar las magnitudes, sino que se da prioridad al estudio de las relaciones entre los objetos del espacio, y la ubicación y relaciones del niño con dichos objetos. Es más adelante que aparece la necesidad de incluir no solo las medidas sino un manejo más complejo de los objetos y sus relaciones, lo que da lugar a la entrada a sistemas geométricos, de tal manera que estos se constituyen en herramientas potentes de exploración y representación del espacio.

Con el desarrollo de dichos sistemas se hace énfasis en el desarrollo del pensamiento espacial, "considerado como el conjunto de los procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y se manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones, y sus diversas traducciones a representaciones materiales" (MEN, 1998, p.56). Es entonces sobre esta mirada de la geometría, en relación con el desarrollo del pensamiento espacial y los sistemas geométricos, que se espera avanzar en este proyecto, haciendo énfasis en el estudio de las figuras y su papel en dicho desarrollo.

Las consideraciones anteriores se vinculan con las preocupaciones que a todo profesor de matemáticas en el colegio le surgen en la búsqueda de formas de trabajo en clase, que les permita a los estudiantes acercarse de manera significativa al pensamiento espacial, al mismo tiempo que se involucran en actividades de clase en las cuales puedan participar y aportar. La siguiente pregunta orienta este proceso de búsqueda:

¿De qué manera las operaciones cognitivas de construcción, visualización y razonamiento pueden aplicarse en la formulación de una propuesta para el desarrollo del pensamiento espacial al inicio de la educación básica secundaría del Colegio Jefferson?

1.2 Objetivos

1.2.1 General:

- Determinar las características del diseño de situaciones de aprendizaje que favorezcan la formación del pensamiento espacial, mediante las actividades cognitivas de construcción, visualización y razonamiento, al inicio de la educación básica secundaria del colegio Jefferson.

1.2.2 Específicos:

- Determinar las condiciones necesarias para el desarrollo de los procesos de visualización requeridos en el trabajo con figuras geométricas para garantizar la articulación entre los procesos discursivos y figurales.
- Identificar los elementos teóricos y prácticos requeridos en el proceso de construcción de figuras que permitan un acceso significativo a la comprensión de sus propiedades.

- Establecer condiciones para el diseño de un conjunto de situaciones de aprendizaje de figuras geométricas que pongan en juego los procesos cognitivos de visualización, construcción y razonamiento.
- Indicar algunas condiciones para la formulación de situaciones de aprendizaje en relación con el desarrollo del pensamiento espacial al inicio de la educación básica del Colegio Jefferson.

1.3 Contextualización y Justificación del Problema

Aprender matemáticas es un imperativo de las sociedades modernas. Sin embargo, se encuentran diversas aproximaciones a lo que se ha de entender cuando se habla de dicho aprendizaje; se pasa de afirmaciones que tienen que ver con el desarrollo y manejo de las técnicas y procedimientos básicos de la disciplina matemática, a otras que proponen el desarrollo de habilidades para la resolución de problemas que se fundamentan en conocimientos y destrezas matemáticas, hasta propuestas en las que el aprender matemáticas tiene que ver más con la participación de los estudiantes en las actividades y procedimientos propios de la comunidad matemática.

En cada una de estas, por lo tanto, se definen distintas alternativas que han de orientar a los maestros en el trabajo con sus estudiantes, de tal manera que se alcancen dichos aprendizajes. Sin embargo, en unas y en otras, se encuentra recurrentemente con el hecho de que dichos aprendizajes no son alcanzados (logrados, desarrollados, etc.) por la mayoría de los estudiantes.

Este panorama invita a re-pensar el problema del aprendizaje de las matemáticas, a intentar caminos alternativos, o, recorrer los mismos dando pasos más largos o más pequeños, poniendo atención a elementos que no fueron contemplados en los recorridos anteriores, etc., de tal manera que la búsqueda por aproximaciones pertinentes y eficaces, tanto para maestros y estudiantes, se constituye en un tema de investigación constante en la educación matemática actual.

Para el caso particular de la geometría la reflexión discurre por una senda similar; la historia reciente de la enseñanza de la geometría ilustra un sinnúmero de consideraciones que tendrían que hacerse antes de iniciar cualquier trabajo de enseñanza de la misma. Se puede iniciar con las preguntas: ¿Qué es geometría? ¿Dónde o en qué momento del currículo enseñarla? ¿Qué geometría enseñar? Para ilustrar solo algunas de las cuestiones que han de atenderse con el fin de contextualizar esta propuesta.

En Alsina y otros (1992) se encuentra un grupo de reflexiones en este sentido, de las cuales se retoman aquí algunos elementos. La denominación de geometría no encuentra ningún problema para aquellos que están por fuera de las matemáticas, se puede buscar en una enciclopedia y encontrar "parte de las matemáticas basada en la intuición del espacio" o algo parecido, esta definición evocará en ellos palabras como puntos, rectas, etc., y recordarán trabajos relacionados con formas, figuras, fórmulas, entre otras. Pero para los profesores, el problema central sería poder señalar lo que no es geometría, ya que el saber geométrico encuentra relación con el álgebra lineal, los sistemas de ecuaciones, la topología, geometrías finitas, etc. Es la búsqueda de un punto medio de estas dos posturas lo más importante para responder a la pregunta.

Se señala el trabajo de Malkevitch (citado por Alsina, 1992) en el que se hace una lista de los diferentes apartados de las matemáticas que pueden relacionarse con la geometría: geometría euclídea, geometrías no euclídeas, geometría proyectiva, y así en una lista que alcanza las 50 entradas. Con lo cual se llega a la conclusión de que la palabra geometría esconde multitud de apartados de interés matemático, reconociendo al mismo tiempo que tiene un número amplio y versátil de aplicaciones.

Lo anterior permite entender el largo y complejo proceso que ha realizado la comunidad de educadores matemáticos para llegar a las propuestas de enseñanza de la geometría en la escuela en la actualidad, las cuales contemplan al menos: "la geometría como ciencia del espacio, la geometría como método para visualizar conceptos y procedimientos matemáticos y la geometría como punto de encuentro entre la matemática como teoría y como modelo" (ICMI, 1994. p. 347).

Estos son algunos aspectos que han de ser privilegiados para el desarrollo de este proyecto, ya que en este se asume no solamente a la geometría como otro tópico de las matemáticas, sino que se entiende que su naturaleza y papel, como disciplina, le dan una posición única. Probablemente no hay mejor lugar que la geometría para dilucidar y discutir el concepto y el papel del razonamiento y de la demostración en matemáticas. El espectro completo de ver, entender o aceptar una afirmación o una línea de pensamiento, así como sugerir, convencer o persuadir, se puede encontrar e investigar en diversos campos geométricos (Samper, 2001).

Pero este trabajo con la geometría en la escuela ha tenido diferentes aproximaciones, todas ya bastante conocidas. La más recordada y cuestionada es aquella formulada con base en los trabajos del grupo Bourbaki; ya no hace falta recordar el *célebre* grito de Jean Dieudonné "¡Abajo Euclides¡" en el seminario de Royaumont, en la cual se exaltó el cultivo del rigor, la construcción formal de los conceptos y el intento de considerar para la enseñanza los problemas de la disciplina.

Esta historia reciente ha dado lugar a reformas en las cuales la geometría intenta volver a ocupar el lugar perdido gracias a la reforma señalada. En estas lo común es que nadie propone como obligatoria una forma particular de desarrollo de la geometría; todos están de acuerdo en que se debe enseñar, y desde muy temprano en la escolaridad, pero no es fácil encontrar posturas generales y unificadas. Es en el marco de estas nuevas búsquedas en la que se instala esta propuesta de trabajo con la geometría, en la que procesos cognitivos como el razonamiento y la visualización orienten el diseño de las situaciones de clase.

Pero esta aproximación requiere una visión también diferencial del aprendizaje; si la geometría sufrió cambios, la idea de aprender también se ha modificado un poco. En la escuela tradicional la geometría quedó relegada a aspectos métricos como el cálculo de áreas o perímetros, entre otros pocos conceptos, todos enmarcados en trabajos de solución de ejercicios. Lo anterior exigía del estudiante la atención máxima para identificar y recordar los procesos del profesor y le excluía de una participación activa, en la que él pudiera reconocer los problemas como genuinos y el conocimiento geométrico como una elaboración social de la cual él hacía parte y que le serviría para resolver dichos problemas.

Se propone entonces una aproximación que le dé un papel central a la concepción del aprendizaje de las matemáticas como un asunto de comunicación (Sfard, 2008), es decir, aprender matemáticas es aprender a comunicarse en los términos de la comunidad. Leer los textos que la comunidad produce, producir textos que la comunidad comprenda; discutir y resolver los problemas a los que se enfrenta o se ha enfrentado la comunidad, valorar las respuestas que otros miembros dan, comprometerse con las búsquedas y retos que la comunidad enfrenta, hacer que la comunidad avance. Será necesario, sin embargo, presentar la forma en que se está entendiendo la comunicación y los elementos que se le asociaron: leer, discutir, valorar (emitir juicios) y otros, de tal manera que la aproximación se entienda en los términos de esta propuesta.

Para alcanzar esa comprensión de lo que pasa en el salón de clase, que será uno de los niveles en los que se expresa la naturaleza de dicha comunidad, es imprescindible dar una mirada a lo que ocurre en las clases; el análisis de estas situaciones de clase proveerá los elementos para valorar el alcance de la propuesta presentada. Para llevar a cabo lo anterior, la clase será entonces analizada con base en las distintas actuaciones de los participantes cuando se enfrentan a actividades relacionadas con el desarrollo del pensamiento espacial, las cuales tienen a la construcción, la visualización y el razonamiento como las operaciones sobre las cuales se han organizado dichas actividades.

Se espera que dicho análisis permita encontrar el conjunto de características que estas actividades deben tener para propiciar el aprendizaje de aspectos relacionados con el desarrollo del pensamiento espacial y los sistemas geométricos en los estudiantes del grado sexto del colegio Jefferson.

Las clases de geometría del colegio se proponen como el escenario en el cual se desarrollen estas reflexiones, por lo tanto se requiere de una metodología de investigación que permita tener en cuenta las condiciones particulares de dicho trabajo. La revisión y análisis de las opciones de trabajo muestran que los Experimentos de Enseñanza (Cobb, 2000) son una alternativa potente para el estudio de una intervención en clase, en la que la experiencia y condiciones particulares de los participantes se conjugan con los aportes teóricos de la investigación en educación matemática para diseñar e implementar una propuesta de trabajo en clase de matemáticas.

Los resultados obtenidos por los estudiantes del colegio en las pruebas SABER, los cuales muestran una disminución en los desempeños de los estudiantes al pasar de la educación básica primaria a la básica secundaria, dieron los primeros argumentos para seleccionar el grado sexto como el momento escolar en el cual situar la propuesta; esto implicó, además, que el autor del presente proyecto fuese el profesor de dicho grado. Así, la planeación de las actividades, la selección de conjeturas y la determinación final de las situaciones que habrían de ponerse en juego en el salón de clase, se articularon con los desarrollos respectivos de la propuesta pedagógica que el profesor trabajó en dicho grado.

La articulación de este proyecto con las reflexiones que se siguen en la línea de investigación en Lenguaje, Razonamiento y Comunicación de Saberes Matemáticos, permitió que se propusieran tres trabajos de pregrado de la Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas para ser desarrollados en relación con la misma problemática; todos tomaron como centro de la reflexión los tres procesos cognitivos asociados a la actividad geométrica. Dos de estos trabajos (Bahamón & Bonelo, 2015; Hoyos, 2015) se centraron en el trabajo de clase con situaciones que pusieran en juego dichos procesos, y el tercero se centró en revisar algunos aspectos de éstos en los textos escolares (Bustamante & Giraldo, 2015); los tres trabajos de grado estuvieron bajo la dirección del autor de este trabajo de maestría.

La puesta en acción del trabajo que se acaba de señalar, requiere la constitución de una serie de elementos teóricos y metodológicos que apoyen el desarrollo de la misma; la presentación de dichos elementos es el propósito del siguiente capítulo.

CAPÍTULO 2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS DEL PROYECTO

Este trabajo se centra en la caracterización de los procesos cognitivos involucrados en el aprendizaje de la geometría: construcción, visualización y razonamiento; cada uno presenta particularidades en relación con el aprendizaje de la geometría y, a la vez, entre ellos se evidencian relaciones y diferenciaciones cuya comprensión y desarrollo es fundamental para el desarrollo del conocimiento geométrico. Se presentan algunos elementos que a este respecto ha formulado Raymond Duval (2001, 2003, 2004b, 2005).

Dicha caracterización pasa por determinar el papel que cada uno de estos procesos, junto con sus relaciones y diferenciaciones, juega al momento de enseñar y aprender geometría. Esta no se puede hacer al margen de un trabajo directamente relacionado con la práctica de enseñar geometría, es decir, se espera que la puesta en juego de actividades de clase sirva, en una especie de vínculo dialéctico, para actualizar aspectos relevantes de tal caracterización y al mismo tiempo ampliar, precisar o corregir otros aspectos que pudieran haberse omitido. Para llevar a cabo este trabajo se requiere un conjunto de elementos metodológicos que acompañan el diseño y análisis de las situaciones.

Se presentan entonces en este capítulo las características de una perspectiva semiótica y cognitiva para el aprendizaje de las matemáticas, y de la geometría en particular, que se han de tener en consideración para la formulación de la propuesta; junto con esta se determinan elementos curriculares que para el desarrollo del pensamiento espacial ha formulado el Ministerio de Educación Nacional y algunas de las condiciones particulares de estos, que se proponen al interior del colegio en el plan de área de matemáticas. Posteriormente se hace una descripción de los procesos cognitivos que se han propuesto como el centro del trabajo.

Finalmente, se presentan los elementos fundamentales de la propuesta metodológica de los experimentos de enseñanza, en particular las trayectorias y la conjetura.

2.1 Una perspectiva semiótica y cognitiva del aprendizaje de las matemáticas

En el estudio del aprendizaje de las matemáticas desde un punto de vista cognitivo se parte de una caracterización de la actividad matemática; se señala que los procesos matemáticos se constituyen a partir de una serie de trasformaciones que involucran el uso de múltiples y diversos sistemas de representación, los cuales a su vez permiten el acceso a los objetos matemáticos; esta consideración hace pensar sobre la naturaleza y la particularidad de dichos sistemas. Se trata, en últimas, de estudiar las exigencias que la actividad matemática le impone a quienes la aprenden (Duval, 2004b).

Para el análisis de los procesos de pensamiento que están involucrados en la actividad matemática es necesario reconocer dos asuntos esenciales. Primero, la variedad de sistemas de representación ha de estudiarse en las relaciones de una doble oposición, ya que hay dos tipos de sistemas de representación si se tiene en cuenta su funcionamiento: aquellos en los que el sistema en estudio es empleado de forma exclusiva en la actividad matemática y aquellos sistemas que se utilizan tanto en matemáticas como en otros dominios de conocimiento; esto es, registros mono y plurifuncional respectivamente. Segundo, existen otras dos formas de clasificar dichos sistemas de representación: si las representaciones se organizan en una dimensión que, en forma de una lengua, obliga a una lectura secuencial o si, por el contrario, permiten una mirada sinóptica de los objetos representados; esto es, registros discursivo y no discursivo respectivamente (Duval, 2004a).

Al cruzar estas dos oposiciones se tienen cuatro tipos fundamentales de sistemas de representación. Uno de los asuntos centrales que deja ver esta clasificación es que el trabajo en los sistemas de representación plurifuncionales se enfrenta a dificultades asociadas a las concepciones que tienen los estudiantes respecto de su funcionamiento: se cree que funcionan de la misma manera, incluso de maneras más simples, en la actividad matemática que en otros dominios.

En el caso particular de la geometría, se tiene un registro plurifuncional discursivo (la lengua natural) y un registro plurifuncional no discursivo (las figuras); lo anterior implica que en geometría aparezca de manera recurrente la necesidad de distinguir los funcionamientos de dichos registros al interior y por fuera de las matemáticas. Es decir, parte del trabajo con los estudiantes ha de estar centrado en el reconocimiento de las particularidades que adopta el trabajo con cada uno de estos cuando se aborda una actividad geométrica. Dicho reconocimiento se basa en el conocimiento del funcionamiento de cada registro y de las representaciones que en ellos se producen.

Las representaciones semióticas tienen un lugar preponderante en la actividad matemática, ya que dichas representaciones, al permitir el acceso a los objetos matemáticos y garantizar las posibilidades de transformación de las mismas, determinan de manera singular el trabajo en matemáticas: no hay otra rama de estudio en la cual las representaciones jueguen un papel tan fundamental como en matemáticas.

Sin embargo, el trabajo con dichas representaciones determina dos retos para los que estudian el aprendizaje de las matemáticas (Duval, 2004b); por un lado, hay una paradoja que surge del hecho de que la única forma de acceder a los objetos matemáticos es a través de sus representaciones y sin embargo se exige que no se confunda un objeto con su representación. Por otro lado, en matemáticas hay un amplio número de sistemas de representación para los objetos matemáticos, todos con características específicas, que imponen a la actividad matemática el manejo de esta multiplicidad de sistemas y de las relaciones entre ellos.

Más allá de las posibilidades de representación que ofrece cada sistema particular, lo que interesa en el trabajo en matemáticas son las posibilidades de transformación de las representaciones que son producidas, estas transformaciones dan a los sistemas sus potencialidades para la realización del mismo. Las transformaciones que permiten un sistema de representación son de dos tipos: aquellas que producen otra representación en el mismo sistema (tratamientos) y aquellas que por el contrario producen otra representación en un sistema distinto (conversiones). La no distinción entre estos dos tipos de transformaciones y de las particularidades que tiene la conversión, son una fuente de incomprensión en matemáticas. Las posibilidades de hacer trazos sobre una figura dada sería un ejemplo de un tratamiento en el registro de las figuras; la construcción de una figura a partir de unas instrucciones dadas en lengua natural serían un ejemplo de conversión; se verá que estas y otras trasformaciones son esenciales para el trabajo en clase de geometría.

Finalmente, si se quieren atender las dificultades que presentan los estudiantes en la actividad matemática se debe avanzar en la comprensión de la siguiente hipótesis: la comprensión en matemáticas implica la coordinación (puesta en correspondencia) de al menos dos sistemas de representación para el objeto matemático en estudio. Esta coordinación se enfrenta, al menos, con las dos dificultades señaladas: el funcionamiento en matemáticas de los registros plurifuncionales y las condiciones particulares que la actividad de conversión le impone a las matemáticas. Lo anterior implica para el trabajo en geometría el estudio de las condiciones que en ella tiene la coordinación de discurso y figura, ya que en este campo dicha coordinación tiene condiciones especiales.

2.1.1 Una perspectiva para el trabajo en geometría

A partir de las consideraciones anteriores, que de manera general intentaban señalar las características que tiene el trabajo en matemáticas, se puede hacer un ejercicio similar para la geometría. Para ello se retoman los trabajos de Duval (2001, 2003, 2004b, 2005) los cuales han logrado constituir una serie de reflexiones y afirmaciones que dan sentido a una propuesta a tener en cuenta cuando se trata de usar elementos semióticos y cognitivos en el diseño de actividades para el trabajo en clase de geometría.

Las actividades geométricas se caracterizan por involucrar al menos dos registros de representación, de manera articulada y simultánea. En el registro de la lengua natural, por ejemplo, se presentan las proposiciones sobre las propiedades de los objetos y sus relaciones, los nombres de las figuras, o se combinan proposiciones para dar explicaciones y presentar soluciones a problemas. Por su parte las figuras constituyen un sistema de representación característico del trabajo en geometría; con ellas se representan objetos, arreglos o combinaciones de ellos que determinan problemas o situaciones de trabajo; el uso de figuras es una constante en la geometría escolar.

Estos dos registros de representación encuentran en la geometría escolar una coordinación especial, ya que en la mayoría de situaciones de clase se pasa de uno a otro casi de manera instantánea y sin dedicar mayor atención a este proceso; dicha coordinación se torna fundamental en muchas situaciones de trabajo, ya que la constitución de las figuras como representantes de un problema pasa muchas veces por las posibilidades de significación que se desprende gracias al enunciado que acompaña a dicha figura. De hecho, se pueden tener situaciones muy distintas basadas en la misma representación figural si se cambia el enunciado que le acompaña.

Esta cercanía despierta en los estudiantes lo que Duval (2004b) ha llamado falsa proximidad. Es decir, el hecho de que ambos registros sean plurifuncionales les dota de una cercanía con la experiencia de la mayoría de los estudiantes, cercanía que crea la sensación de que el funcionamiento de estos registros es similar en sus usos y contextos a los que ya son conocidos por los estudiantes. Una de las tareas de la escuela es enseñar a los estudiantes las especificidades del funcionamiento de cada uno de estos registros en la actividad geométrica y construir diferenciaciones con los funcionamientos por fuera de las matemáticas.

El análisis que desarrolla Duval (2001) de estas características de la actividad geométrica se basa en considerar que hay tres procesos cognitivos que participan de manera directa en los aprendizajes de geometría: la visualización, la construcción y el razonamiento. El estudio de cada uno de estos procesos, y de otros que les son conexos, es la clave de la propuesta para el trabajo en clase de geometría.

Se puede iniciar haciendo entonces una reflexión en relación con los procesos de visualización involucrados en la actividad matemática, como un marco general sobre el cual presentar las formas tradicionales de trabajo en clase de geometría y terminar con una forma alternativa, que a manera de propuesta, recoja este grupo de reflexiones; los párrafos siguientes se dedican a esto último; los procesos se describirán en un apartado posterior.

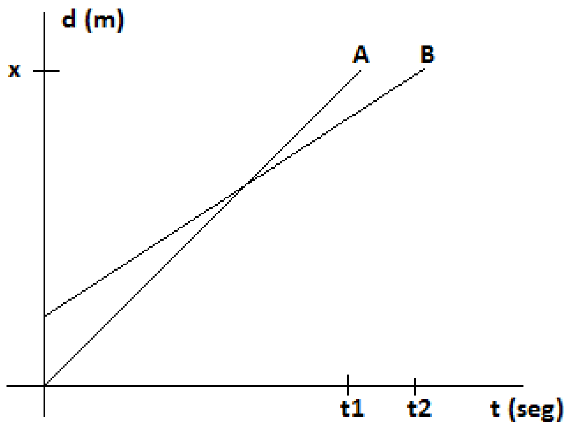
El trabajo que se propone en geometría está asociado necesariamente con el desarrollo de las capacidades de visualización que debe construir un estudiante. Una primera caracterización de este proceso señala dos tipos de visualización: la icónica y la no icónica (Duval, 2010).

La visualización icónica supone un acceso a las figuras geométricas del mismo modo que en otras representaciones gráficas por fuera de las matemáticas; esto se constituye en una dificultad en el aprendizaje de la geometría pues se ha mostrado que el funcionamiento de tales representaciones no es el mismo en estos dos planos de la actividad humana. Una de las características de las figuras en geometría, por ejemplo, es que han de ser construidas con la ayuda de instrumentos, lo cual establece una diferencia fundamental, aunque inicial, con el funcionamiento de las figuras por fuera de la geometría.

Esta visualización procede por asociación de la representación con el parecido de esta con algún objeto real ya conocido. Para el caso de las representaciones gráficas, cuando vemos el dibujo siguiente:

La reconocemos como la representación de una clase general de objetos (una paloma), con ciertas características (un ave, generalmente blanca, pequeña, etc.); aunque si asociamos esta representación con procesos de paz, del pasado colombiano, eso será otra cosa distinta a una mirada icónica sobre el dibujo[1].

Ya en el campo de las matemáticas, se puede ejemplificar este tipo de visualización con ciertas miradas que se dan sobre representaciones gráficas de funciones realizadas por aprendices o por aquellos que no han logrado construir una significación adecuada de las mismas, por ejemplo:

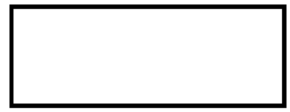


En la gráfica se presenta el recorrido de dos móviles A y B, ¿cuál de ellos iba más rápido?

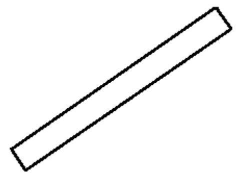
Una mirada icónica sobre la gráfica haría que se necesitaran valores para realizar cálculos y responder la pregunta, por ejemplo. Es decir, esta se centraría en las características de algunos puntos, como el de partida y llegada, y no sobre una mirada global de la gráfica. Dicha mirada global, que sería un ejemplo de visualización no icónica, permitiría entender la inclinación de las gráficas como una descripción del valor de la rapidez y con ello deducir fácilmente que el objeto A iba más rápido.

En geometría el reconocimiento icónico de las figuras requiere de "una figura particular que sirve de modelo, y las otras figuras son reconocidas según su grado de parecido con este modelo" (Duval, 2004. p. 168). Basta con pedirle al lector que piense en un rectángulo para darse cuenta que es probable que haya pensado en una figura como esta:

[1] En Colombia, el proceso de paz llevado a cabo en la administración del gobierno de Virgilio Barco usó este símbolo (de nuevo, en el sentido de Pierce) para representar el estado de cosas que se avecinaban tras dicho proceso, haciendo uso de una significación ampliamente aceptada del mismo.



Y no necesariamente en una como esta:



Es decir, el reconocimiento se basa en la semejanza del objeto percibido con otro ya conocido, en el marco de un proceso de enseñanza que inicia con la designación del objeto mismo o de sus partes o propiedades (Moriena & Scaglia, 2003, 2005). Así, las formas reconocidas se consideran como un perfil, en el que el contorno juega un papel central, al punto de que es este el que retiene la mayor cantidad de información que se puede recuperar de la forma percibida; lo cual implica que otras propiedades que pudiese tener el objeto, pero que estén ligadas a elementos diferentes del contorno, pasen desapercibidas.

Sin embargo, el asunto fundamental en la entrada icónica a la visualización de una figura, en geometría en particular, tiene que ver con el hecho de que en esta entrada las formas reconocidas aparecen estables (Duval, 2005), es decir, aparecen como si no fueran susceptibles de trasformaciones; al ser representaciones y sabiendo que la potencia de toda representación no está solo en el hecho de poder dar acceso a cierta información, sino que su potencia como signo radica en el hecho de poder transformarse y expresar de modos distintos, esta estabilidad que la visualización no icónica da a las figuras se convierte en un impase que ha de ser superado para realizar un aprendizaje significativo de la geometría (Duval, 2010). La base de la actividad en geometría está en la posibilidad que tenga el estudiante de descomponer una figura (en unidades figurales elementales o en una red de rectas) como acción inicial antes de hacer construcciones o resolver una situación problema.

Es claro pues que uno de los primeros retos que ha de enfrentar una propuesta de trabajo en clase de geometría es la de apoyar el desarrollo de habilidades que le permitan al estudiante alejarse de una visualización icónica de las figuras. Un primer paso en este sentido es entonces comprender la naturaleza de la visualización no icónica.

Podría bastar para presentar la visualización no icónica una descripción en términos de la negación simple: pues es todo lo que no es visualización icónica. Parece mejor dar ejemplos como la mirada simbólica sobre la paloma de la paz, o aquella que permite ver la velocidad en la gráfica de los dos móviles, o un rectángulo en el que se resaltan las características de sus diagonales y los triángulos que ellas describen. Sin embargo tal grado de ilustración podría no ser suficiente, por lo tanto se retoma una de las definiciones que presenta Duval (2004c):

> (La visualización no icónica permite) reconocer las formas, bien en virtud de las limitaciones internas de organización que hacen imposible ciertas deformaciones o ciertas aproximaciones, bien en virtud de deducciones efectuadas discursivamente en función de las propiedades que hayan sido enunciadas en las definiciones o en los teoremas que declaran lo que representa una figura. (p. 168)

Aparece en la definición un elemento que no está de más resaltar: toda figura para constituirse como tal requiere de un enunciado en el cual se presenten los elementos del problema del que dicha figura hace parte, o un enunciado en el que se determinen las condiciones o características del objeto que se representa con la figura. Es decir, si las propiedades geométricas presentes en tales enunciados dirigen el análisis de la representación visual, se dice que hay una subordinación de dicha representación visual a la información que se da en tales enunciados.

Sin embargo dicha subordinación no se da de manera espontánea; hay múltiples elementos, entre los que podría señalarse la visualización icónica, que pueden hacer prevalecer la información dada por la representación visual. Esa subordinación ha de ser construida por los estudiantes (Duval, 2005). Para conseguirla los estudiantes deben reorganizar su percepción de las formas; han de tener una mirada no icónica a las figuras, esto es, poder dejar a un lado la percepción de los contornos y fijarse en las unidades visuales de una dimensión (1D) pues es sobre ellas que descansa el discurso, al menos el que se refiere a figuras planas, toda vez que en dicho discurso sobresale el establecimiento de relaciones entre tales unidades de dimensión uno.

La mirada que se hace sobre las figuras puede entonces, como se vio, estar en relación con el discurso que acompaña a las figuras, o con los posibles procesos de solución a un problema que dicha mirada desencadena, o simplemente con las condiciones visuales que la figura como representación gráfica determina. Estas formas de ver una figura reciben los nombres de aprehensión discursiva, operatoria y perceptiva. Se presentan a continuación algunas de sus características (Torregrosa & Quesada, 2007).

La aprehensión perceptiva se puede definir como aquello que se deja ver al primer golpe de vista, con la primera mirada, sobre una figura. Ese reconocimiento es de dos clases, la primera tiene que ver con el simple reconocimiento de una señal o una marca que se distingue del contorno; discriminar sería la clase de proceso al que se alude en esta clase. La segunda está relacionada con la identificación de objetos que corresponden a formas ya conocidas; esta es comparable con la visualización icónica de una figura. Sin embargo, ninguno de estos dos tipos de reconocimiento escapan a la iconicidad que ya se discutió más arriba; dicha iconicidad no apoya los procesos de mirar las figuras que se requieren en la actividad geométrica.

La aprehensión discursiva tiene que ver con aquella mirada sobre una figura que está comandada por un enunciado que acompaña a la figura. Ya se señaló también que el enunciado que acompañe a una figura puede hacer que la representación que se asocie a dicha figura cambie. Se pueden formular problemas distintos acompañando a una misma figura en dos enunciados diferentes. En últimas, lo que se quiere señalar es que se pueden establecer relaciones entre las miradas posibles sobre una figura y los enunciados que las acompañan; sin embargo, se ha mostrado que hay cierto predominio de lo visual sobre lo discursivo, es decir, hay ciertas formas que se reconocen independientemente de lo que el enunciado presente. Se afirma entonces que hacer ver a los estudiantes lo que es necesario ver para resolver un problema debe estar asociado a otra aprehensión, la operatoria.

En la aprehensión operatoria sobre una figura, que está asociada o determina a un problema, lo que se ve da pistas sobre qué operaciones realizar para encontrar la respuesta a dicho problema. Así, esta sería una de las aprehensiones sobre las cuales parece necesario centrar una actividad de enseñanza (Marmolejo, 2003).

Desarrollar en los estudiantes esta forma de ver que activa, por decirlo de alguna manera, la realización de tratamientos sobre las figuras que pueden conducir a la solución de un problema, o que por lo menos dan lugar a procedimientos de búsqueda de dicha solución, se constituye en el objetivo que se quiere alcanzar en el proceso de aprendizaje de la visualización en geometría.

Duval (2010) estudia en dos grandes grupos este tipo de transformaciones sobre las figuras. Las primeras tienen que ver con descomponer una figura en otras figuras (subfiguras); las segundas tienen que ver con la posibilidad de descomponer una figura en unidades figurales de una dimensión inferior. Las primeras se conocen como modificaciones mereológicas y las segundas como un proceso de deconstrucción dimensional.

Las modificaciones mereológicas son de dos clases: heterogéneas y no heterogéneas; esto tiene que ver con el tipo de subfiguras obtenidas: si dichas subfiguras tienen la misma forma se dirá que es homogénea, si no tienen la misma forma son heterogéneas. Esta distinción al mismo tiempo genera otra subdivisión de las homogéneas: si las subfiguras y la figura son de la misma forma se dice que la modificación es estrictamente homogénea. Las siguientes figuras ilustran lo anterior; se toma como figura de base un rectángulo:

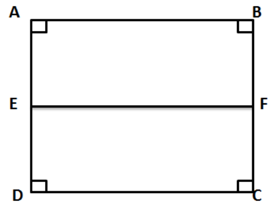
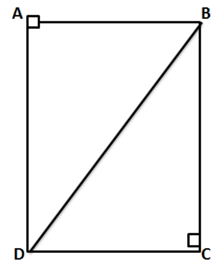
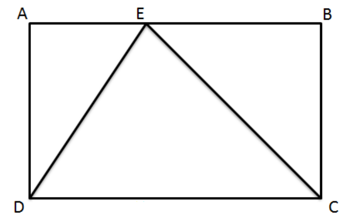
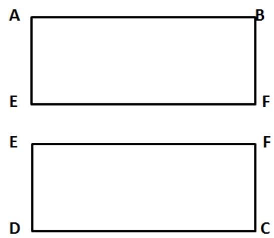
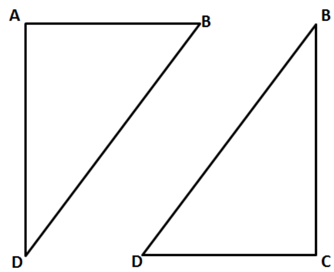
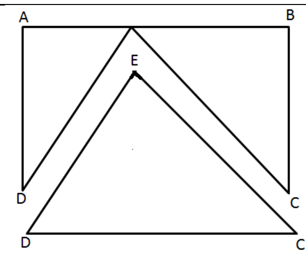
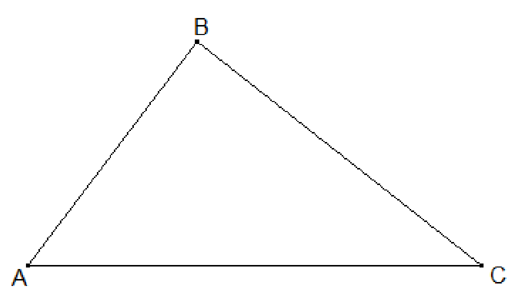
Modificación homogénea		Heterogénea
Estrictamente homogénea	No estrictamente	
		
		

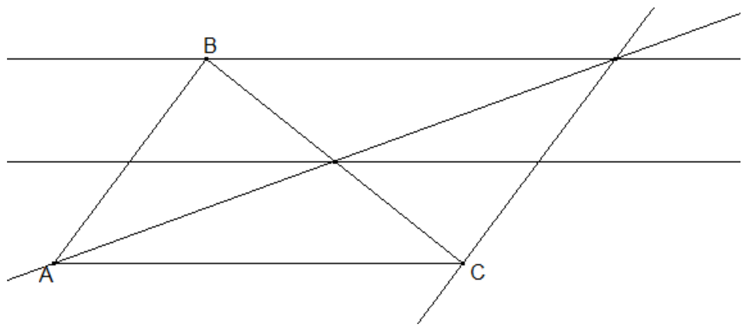
Tabla 1. Modificaciones mereológicas

La deconstrucción dimensional de formas tiene que ver con la posibilidad de vencer la predominancia que tienen las formas 2D sobre las formas 1D, es decir, se trata de poder reconocer las unidades 1D que componen una figura 2D (esto limitando el análisis a las figuras planas, pues se podría hablar de una deconstrucción 3D en 2D); esta forma de ver ha de permitir, además, ver las diferentes rectas – por ejemplo- que están asociadas o son asociables a una figura simple como un triángulo. Las figuras siguientes ilustran este punto.

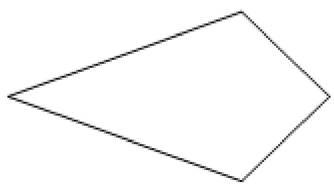
Problema: Dado un triángulo, hallar un paralelogramo de área igual.



La deconstrucción dimensional tiene que ver con la posibilidad de ver la red de rectas que en este caso se asocian con la figura del triángulo (Duval, 2004c). A partir de esa deconstrucción identificar las subfiguras que resuelven el problema es un asunto trivial.

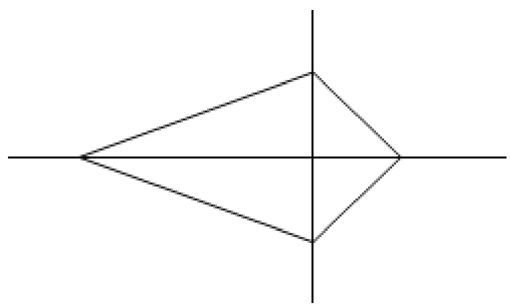


Si el ejemplo parece demasiado elaborado se puede hacer uso de una deconstrucción menos elaborada, pero igual de potente para resolver un problema que se presentó a un estudiante.



Problema 2. Usando los instrumentos que se te entregaron (regla y escuadra) construye la figura que se muestra:

Las posibilidades de uso, para resolver el problema, de los instrumentos entregados son más potentes si el estudiante logra ver la figura bajo la siguiente deconstrucción:



Es importante señalar que la deconstrucción dimensional no es una mera estrategia de trabajo. Además de los sustentos cognitivos que se han presentado vale señalar uno de los argumentos de Duval:

> No es superfluo recordar que las primeras definiciones que da Euclides de una línea o de una superficie son una descripción de la deconstrucción dimensional de las figuras: "Los límites de una superficie son líneas" (definición 6). "Una figura es lo que está contenido por algunos límites" (definición 14). Euclides coloca la deconstrucción dimensional de las figuras al comienzo de la geometría, como el umbral que hay que atravesar para entrar en la construcción o el descubrimiento de conocimientos geométricos. (2010, p.109)

La deconstrucción dimensional de formas requiere un funcionamiento distinto a los procesos espontáneos de identificación visual de formas; lo anterior implica que en la enseñanza de la geometría se desarrollen en los estudiantes capacidades de análisis visual de las figuras (Duval, 2010).

Sin embargo, la enseñanza de la geometría en la escuela se ha desarrollado por caminos que no conducen al logro de este propósito; Duval (2004c; 2005) ha hecho una categorización de los tipos de trabajo en la clase de geometría. Identifica cuatro y propone una quinta que sería la que permitiría el acceso a este tipo de transformaciones. Se presenta a continuación una síntesis de estos planteamientos.

La categorización resulta de aplicar cuatro criterios; los tres primeros tienen que ver con las figuras, en particular con los procesos de identificación perceptiva e identificación interpretativa de las mismas; el cuarto criterio tiene que ver con la utilización o no de las propiedades expresadas por los enunciados que acompañan las figuras.

Con base en estos criterios, el primer tipo que se identifica es llamado el "botánico", el cual remite al trabajo en clase que se dedica al reconocimiento perceptivo de las formas elementales usadas en geometría, dado que en este las propiedades de las figuras se asocian con características visuales. Es un trabajo tipo taxonomía, de ahí el nombre que se le asocia, ya que el trabajo que se hace con las figuras es similar al que se hace en clase de ciencias naturales al clasificar las hojas de los árboles.

En el segundo tipo tiene que ver con las actividades que involucran medidas, las cuales se toman de elementos del entorno y que luego se han de llevar a una representación a escala en una hoja de papel; se tiene un trabajo caracterizado por la necesidad constante de cambiar de escalas; las figuras tienen un papel icónico asociado con la conservación de la forma del objeto que se ha de representar.

El tercer tipo se asocia con el trabajo en clase que se organiza con base en el uso de instrumentos de construcción o materiales que apoyen los procesos de exploración de los estudiantes; en estos procesos los estudiantes se acercan a la idea de figura como una representante de ciertas propiedades geométricas.

En el cuarto tipo aparecen las tareas en los que los estudiantes deben hacer modificaciones sobre las figuras, asociadas a la solución de un problema; estas modificaciones pueden ser manuales o gráficas, pero sobre todo el punto está en que no hay un trabajo que las oriente, se deja a la exploración y a la génesis casi experimental de conductas favorables.

Finalmente, la quinta forma de trabajo es la que se formula como propuesta; en ella, las figuras aparecen como representantes de propiedades geométricas y las modificaciones son de carácter gráfico solamente; además, se propone como objeto de enseñanza la génesis de formas de actuación que lleven a desarrollar los procesos necesarios para entender las figuras en este sentido. Con tareas de construcción se apoya el primer rol asociado a las figuras y de ahí se pasa a los procesos de visualización no icónica para apoyar el desarrollo de las modificaciones mereológicas y de deconstrucción dimensional. Es esta quinta forma de trabajo la que orienta el desarrollo de este proyecto.

2.1.2 Aspectos curriculares de la propuesta de trabajo

La geometría euclidiana es parte importante en el trabajo que sobre el pensamiento espacial se hace en la escuela (De Villiers, 1998), sin desconocer que se incorpora cada vez con mayor fuerza algunos elementos de geometría proyectiva, descriptiva, etc., y las tradicionales reflexiones sobre la geometría analítica y la trigonometría. Así, la formación de los estudiantes se organiza –según lo señalado por los estándares- en relación con los sistemas geométricos “Los puntos, líneas rectas y curvas, regiones planas o curvas limitadas o ilimitadas y los cuerpos sólidos o huecos limitados o ilimitados pueden considerarse como los elementos de complicados sistemas de figuras, transformaciones y relaciones espaciales: los sistemas geométricos.” (MEN. 2006, p. 62)

Estos sistemas están constituidos a partir de tres componentes: los elementos que los constituyen, las operaciones entre ellos y las trasformaciones de las que son susceptibles; dichos sistemas:

> … pueden modelarse mentalmente o con trazos sobre el papel o el tablero y describirse cada vez más finamente por medio del lenguaje ordinario y los lenguajes técnicos y matemáticos, con los cuales se pueden precisar los distintos modelos del espacio y formular teorías más y más rigurosas. Estos modelos con sus teorías se suelen llamar “geometrías”. (MEN, 2006, p. 62)

El MEN asume entonces considerar a la geometría euclidiana como el punto de encuentro entre las matemáticas como una práctica social (ICMI, 1994) y como una teoría formal; en ella estos dos aspectos toman connotaciones significativas, ya que como práctica social permite el estudio del espacio físico y el espacio geométrico aportando a la comprensión de ciertas características del mundo que nos rodea (Salin, 2004). Como una teoría formal la geometría permite avanzar en la comprensión del razonamiento matemático, para formular y defender afirmaciones en relación con los objetos y relaciones involucrados en la actividad geométrica, gracias a que en geometría estos procesos encuentran un lugar privilegiado.

En ese sentido, la propuesta que hace el MEN (2006) en los estándares para el grupo de grados de la educación básica secundaría (sexto-séptimo y octavo –noveno) se concreta en un grupo de 11 estándares, de los cuales ocho pueden clasificarse fácilmente en cada uno de los tres componentes de los sistemas geométricos (objetos, relaciones y transformaciones), dos quedan como transversales a estos (por estar centrados en la resolución de problemas) y uno hace alusión a localización en sistemas de coordenadas que escapa a la identificación con alguno de estos elementos; esto no es de extrañar pues el cruce con otros sistemas y pensamientos es natural.

En relación con los *objetos* del sistema se señalan los estándares:

> Identifico y describo figuras y cuerpos generados por cortes rectos y transversales de objetos tridimensionales.
>
> Represento objetos tridimensionales desde diferentes posiciones y vistas.
>
> Clasifico polígonos en relación con sus propiedades. (MEN, 2006, p. 84)

En esta parte se encuentra el estándar sobre el cual se centra este trabajo (clasificar polígonos), toda vez que es uno en el cual se expresa de manera directa el trabajo con figuras geométricas, aspecto que se ha propuesto como la base de las discusiones para la enseñanza de la geometría en el ciclo 6°- 7°.

Para las *relaciones* del sistema: las de semejanza y congruencia, se incluyen los estándares:

> Conjeturo y verifico propiedades de congruencias y semejanzas entre figuras bidimensionales y entre objetos tridimensionales en la solución de problemas.
>
> Reconozco y contrasto propiedades y relaciones geométricas utilizadas en demostración de teoremas básicos (Pitágoras y Tales).
>
> Aplico y justifico criterios de congruencias y semejanza entre triángulos en la resolución y formulación de problemas.
>
> Resuelvo y formulo problemas que involucren relaciones y propiedades de semejanza y congruencia usando representaciones visuales. (MEN, 2006, p.84 y 86)

Finalmente, para las *transformaciones* del sistema: homotecias, rotaciones y traslaciones, se incluye el estándar:

> Predigo y comparo los resultados de aplicar transformaciones rígidas (traslaciones, rotaciones, reflexiones) y homotecias (ampliaciones y reducciones) sobre figuras bidimensionales en situaciones matemáticas y en el arte. (MEN, 2003, p.84)

Los otros estándares que se señalan como transversales son:

> Resuelvo y formulo problemas usando modelos geométricos.
>
> Uso representaciones geométricas para resolver y formular problemas en las matemáticas y en otras disciplinas.
>
> Identifico características de localización de objetos en sistemas de representación cartesiana y geográfica. (MEN, 2003, p.84 y 86)

Aunque el trabajo que se realizó no alcanza a tener en cuenta todo este conjunto de estándares, si se realiza un trabajo directo en clase en relación con el estándar señalado, y en la parte final se hacen propuestas en relación al trabajo con el segundo grupo de estos (relaciones), con la esperanza que en futuros trabajos se aborde el desarrollo de lo que resta. Esa es la razón de incluir en esta parte el grupo total de estándares de estos ciclos.

Toda esta propuesta de estándares para desarrollar el pensamiento espacial se hace en un marco curricular más amplio, que ha de atender asuntos conexos como los contextos o los procesos generales. Es decir, que cada uno de los aspectos señalados para los sistemas geométricos, deberá aparecer enmarcado en el trabajo de clase con algún proceso general, como la resolución de problemas o la modelización, y en algún contexto como el de las matemáticas o el de la vida cotidiana. Estos elementos se consideran en los diseños propuestos de manera general, es decir, se decide que sobre el proceso de resolución de problemas y un contexto matemático, que no se desarrollan en profundidad, se enmarca el trabajo con el estándar seleccionado y con los estándares que involucra la propuesta final.

Para alcanzar lo propuesto por el MEN las escuelas definen acciones que se estructuran fundamentalmente desde una mirada conceptual, es decir, se organiza la propuesta de enseñanza alrededor de las exigencias que la estructura formal del concepto presenta; esta decisión que está ampliamente sustentada ha logrado darle sentido a las prácticas escolares en los últimos años; sin embargo, parece posible ampliar la mirada e incluir en estas exigencias aquellas que la actividad geométrica le impone a los que la realizan.

En este sentido, el trabajo que se realizó intentó definir criterios cognitivos con los cuales desarrollar una propuesta para el trabajo del pensamiento espacial y los sistemas geométricos. Es decir, la selección de actividades y situaciones estuvo dirigida al desarrollo de los tres procesos cognitivos señalados, de tal manera que esto le diera sentido a un aprendizaje con sentido de los conceptos propuestos.

Las actividades fueron llevadas al colegio al inicio del año escolar, por lo cual se necesitó que ellas trataran sobre los elementos que se contemplan en el currículo del mismo para esta parte del año. Así que una revisión a los programas del colegio, y los fundamentos de este que se encuentran en los Estándares del MEN, arrojó que el estándar a desarrollar sería: "Construyo y clasifico polígonos en relación con sus propiedades", el cual en el colegio se expresa en los dos indicadores siguientes:

> Identifico los elementos y características de los polígonos.
> Clasifico polígonos según el número de lados, la longitud de los mismos y su forma.

Con lo cual se procedió a la búsqueda de situaciones y actividades en las cuales se pudieran hacer confluir tanto los elementos teóricos señalados más arriba como estos indicadores.

Con base en los trabajos de Camargo, Leguizamón & Samper (2003) y Duval (2010) se formuló el primer grupo de tres situaciones; en la primera situación, que contenía 5 actividades, cada actividad consistía en la reproducción de un polígono (cuadrado y triángulos) con la ayuda de instrumentos no convencionales (moldes rotos, reglas no graduadas, etc.). Esta primera situación se centró en reflexiones sobre las dos formas de iniciales de visualización, con la ayuda de dichos instrumentos. La segunda y tercera situación, se trabajaron con los cuadriláteros como la familia de polígonos sobre la cual se centró la reflexión. Se buscó desarrollar las características de estos en relación con los procesos de construcción y visualización que se vienen desarrollando, además de una exploración del proceso de razonamiento asociado al trabajo con figuras.

El segundo grupo de tres situaciones, se centra en las relaciones entre figuras planas y lo que se deriva de considerar dichas relaciones como un factor para hacer comparaciones entre figuras; se abordan de nuevo algunos polígonos como triángulos, cuadrados, rectángulos y paralelogramos, junto con el trazo de algunas líneas sobre estos como diagonales y transversales.

2.2 Los tres procesos cognitivos para el aprendizaje de la geometría

El trabajo en geometría exige la articulación de dos registros de representación: primero, el de la lengua con el cual se presentan las propiedades, relaciones asociadas a las figuras y los problemas de los que trata la actividad geométrica; y segundo, la visualización de formas para representar el espacio (Duval, 2004b, 2005). Las relaciones entre discurso y visualización en geometría implican un cambio en el número de dimensiones que han de tenerse en cuenta: se ve en una dimensión superior a la que se usa en el discurso. Esta separación dimensional es uno de los aspectos a tener en cuenta en la actividad geométrica. La construcción de figuras con instrumentos aparece como el primer proceso de la actividad cognitiva que se debe considerar en los cambios que se requieren en el aprendizaje de la geometría; con la aplicación de situaciones de clase en las que esta actividad juegue un papel central, se puede dar inicio a reflexiones sobre las diversas formas de mirar una figura y las relaciones entre dichas miradas y el discurso que la actividad geométrica exige.

Por tener un lugar privilegiado en los diseños de las actividades, es oportuno hacer una ampliación de cada uno de estos procesos cognitivos, a la vez que se va particularizando la forma en que se espera que cada uno de ellos participe en tales diseños; es decir, al ser procesos complejos en cuyo desarrollo se pueden tomar varios años para alcanzar diversos elementos de los mismos, es necesario intentar precisar algunos de sus rasgos y en particular aquellos que se espera poder desarrollar en las clases.

2.2.1 Visualización

En la consolidación de los elementos cognitivos que han de guiar el trabajo en clase de geometría se encuentra en los trabajos de R. Duval, la propuesta para el desarrollo de maneras de ver las figuras que sean pertinentes para el desarrollo de una actividad geométrica significativa. Se propone como una primera forma de ver aquella que está centrada sobre las posibilidades de construcción de las figuras con la ayuda de instrumentos, dado que con esta entrada se ha de garantizar que los estudiantes vean las figuras como representaciones figurales de ciertas propiedades, aquellas que los instrumentos les han garantizado.

Una segunda forma de ver está relacionada con el enriquecimiento heurístico de una figura, es decir, que los estudiantes reconozcan las posibilidades de construcción de nuevos trazos sobre las figuras que les permitan ver lo que antes no se podía ver, de tal manera que la posibilidad de hacer modificaciones mereológicas, por ejemplo, aparezca como una forma de actuar natural en el trabajo de los estudiantes.

Se espera, además, que en el desarrollo de los procesos de visualización que se requieren en la actividad geométrica, se pueda avanzar en el trabajo con una tercera forma de ver, la cual está relacionada con la posibilidad de ver en una figura las unidades figurales que la componen; para esto se requiere construir capacidades que le permitan al estudiante descentrar su mirada de los contornos e identificar elementos visuales de dimensiones inferiores a los que se ven al primer "golpe de ojo". Este cambio del número de dimensiones debe ser el objetivo central de una mirada geométrica sobre las figuras.

Un trabajo que apunte al desarrollo de estas maneras de ver se enfrenta a diferentes consideraciones que trae consigo la actividad geométrica en la escuela. La primera de ellas tiene que ver con el acceso natural que han tenido los estudiantes a las representaciones gráficas de figuras; como ya se señaló, esta supuesta naturalidad de dichas representaciones es un obstáculo inicial que debe ser atendido. Es decir, se deben procurar actividades a los estudiantes en los que la visualización icónica se ponga en cuestión y que el trabajo con las actividades le permita reflexiones que apunten al desarrollo de formas alternas de ver (Duval, 2005). Dicho cuestionamiento a la iconicidad de las formas iniciales de ver puede tener como base una reflexión en relación con la naturaleza de las figuras; ellas no representan un objeto ya conocido por los estudiantes sino que para constituirse como tales deben atender las definiciones o las propiedades que se les atribuyen; este reconocimiento de las propiedades que caracterizan a las figuras es entonces el punto de inicio del trabajo propuesto.

Luego, para la selección de una actividad para los estudiantes en la cual poner en juego la reflexión anterior, se enfrenta a una decisión en dos sentidos. Se debe decidir con qué tipo de tareas trabajar y cuál modo de actividad se privilegiará (Duval, 2005). En el primero se tienen, como opciones posibles, tareas de construcción con un instrumento, tareas de medición sobre un terreno, de reproducción con base en un modelo y de descripción o interpretación de enunciados presentes en un problema. En el segundo, se tienen como opciones dos tipos de actividad, aquellas que tienen que ver con la manipulación de piezas o una actividad llamada concreta, y aquellas que tienen que ver con la producción gráfica de figuras o una actividad representacional.

Cruzando algunas de estas dos variables se puede decidir sobre cada una de las actividades para presentar a los estudiantes; en el primer sentido señalado, se decidió por tareas de reproducción y de comunicación; en el segundo sentido propuesto, se decidió que todas las actividades involucraran actividades representacionales (Duval, 2010).

Así, en la situación 1 se proponen actividades de reproducción con base en instrumentos de construcción no convencionales (moldes y plantillas); en la situación 2 se mantiene el uso de instrumentos no convencionales y se agrega la escuadra como instrumento convencional. En la tercera situación el énfasis se pone en tareas de comunicación, y la construcción se guía por instrumentos convencionales. Finalmente se proponen las situaciones 4 a 6, que incluyen actividades de construcción, de modificación de figuras y de comunicación.

En estas situaciones el papel de las figuras en la actividad geométrica se considera central; se explotan diferentes tipos de actividad sobre las formas visuales; se varían las funciones de las representaciones; se emplean diversos tipos de operaciones para atender las tareas propuestas y se ponen en juego modos distintos de movilizar propiedades geométricas. Se pueden así tener actividades centradas sobre el reconocimiento visual de propiedades en las que la representación se asume como un soporte, y otras en las que las tareas se centren en la visualización en una figura de cierta propiedad geométrica.x

2.2.2 Construcción

Una característica que distingue a las figuras geométricas de otra clase de figuras es que estas pueden ser construidas con instrumentos, ya sea con lápiz y papel o con un software. Este segundo caso no será objeto de reflexión en este trabajo dado que la introducción de un software implicaría reflexiones ontológicas y didácticas que no hacen parte de las consideraciones tenidas en cuenta en el desarrollo inicial de este trabajo; sin embargo, es claro que es un trabajo que queda abierto y sobre el cual seguramente habrá que volver en nuevos proyectos.

En la construcción de una figura la producción de un trazo está asociada a dos elementos: una instrucción que recoge un pedido en relación con aquello que se quiere construir y la movilización de una propiedad geométrica en relación con el o los instrumentos que se van a emplear. Estos elementos dan lugar a lo que Duval (2005) ha llamado *trazos auxiliares*, que son aquellos sobre los cuales se apoya la construcción de una figura pero que no terminan siendo parte de ella; los dos círculos con los cuales, a partir de un segmento, se traza un triángulo equilátero son un ejemplo representativo de esta situación.

Sin embargo, cuando se resuelve un problema en geometría hay otro tipo de trazo que se torna fundamental: los *trazos reorganizadores.* Duval (2005) los presenta así:

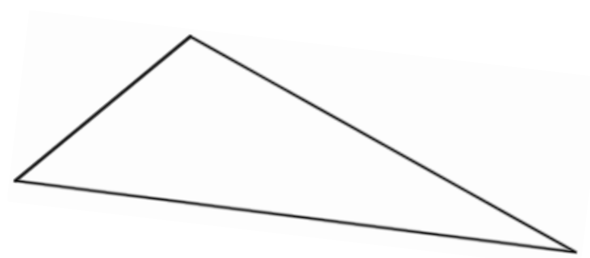
> Il s'agit évidemment d'une déconstruction qui est sans rapport avec la déconstruction impliquée dans la construction des figures. Car le choix de ce tracé est indépendant de la manière dont le triangle peut être construit et il n'y a rien de commun entre ce tracé supplémentaire à trouver et les tracés auxiliaires. Nous appellerons «tracés réorganisateurs» tous les tracés permettant de réorganiser une figure donnée en vue d'y faire apparaître des formes non reconnaissables dans cette figure donnée. (p. 12)

Se tiene aquí un punto de encuentro entre la construcción y la visualización: las posibilidades que un estudiante tiene de ver los trazos reorganizadores necesarios para resolver un problema dependen de las capacidades de visualización que haya construido; se puede decir inicialmente que una mirada icónica sobre las figuras claramente no apoya la construcción de ningún trazo reorganizador. Además, la práctica tradicional de enseñanza de la geometría, en la cual las figuras se consideran evidentes y acabadas, ha dejado por fuera la enseñanza de algunos tratamientos básicos en el registro de las figuras; poder hacer un trazo que la figura no tenía, tan simple como suena, no es una práctica común en las clases de geometría.

Esta posibilidad de tratamiento sobre las figuras puede ser un punto clave para apoyar la solución de problemas en geometría. Además, la construcción de dichos trazos puede permitir la visualización de propiedades o figuras que antes no aparecían; se establece así una relación de interdependencia entre la construcción de trazos y la visualización.

Por ejemplo, al pedir a los estudiantes la reproducción de una figura simple, como un triángulo o un rombo, usando un instrumento como la escuadra (para trazar ángulos rectos y líneas rectas) el recurso a trazos reorganizadores abre un amplio campo de opciones de solución al problema propuesto, por ejemplo:

Actividad 1 (situación 2). Usando los instrumentos que se te entregaron (escuadra) construye el triángulo que se muestra:



La construcción de la altura, sin que se recurra necesariamente a ella por su nombre, permite que surjan estrategias de reproducción posibles con el instrumento que se tiene.

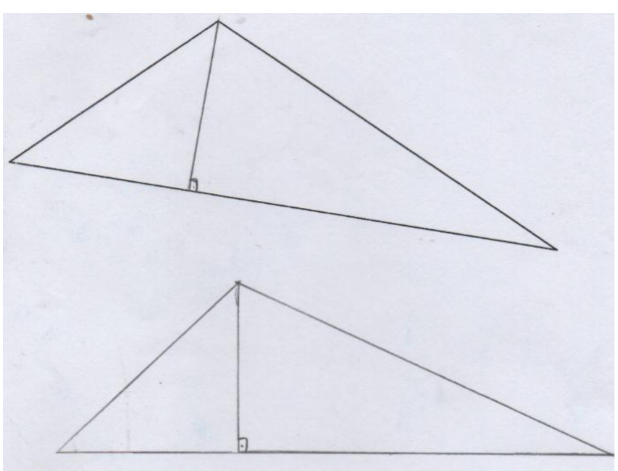
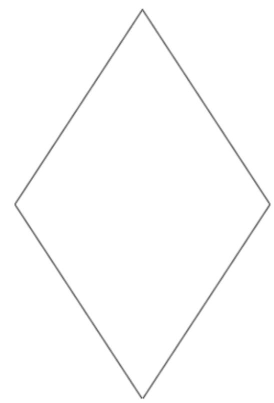


Figura dada (sin el trazo de la altura)

Reproducción de la anterior, realizada por un estudiante.

Sobre el triángulo de arriba, dado en la actividad, el estudiante trazó la altura, la cual reprodujo en la parte inferior y con base en ella pudo terminar el trazo de los demás lados del triángulo (aunque en este caso el estudiante ha borrado, o no trazó, las rectas que contenían los lados y dejó solamente los segmentos, aspecto que puede afectar la subsecuente deconstrucción dimensional que se busca en esta actividad). Otro ejemplo del papel de estos trazos en la solución de un problema de reconstrucción es el siguiente:

Actividad 3 (situación 2). Usando los instrumentos que se te entregaron (escuadra) construye la figura que se muestra:



Siguiendo un procedimiento similar al anterior un estudiante obtiene la siguiente solución:

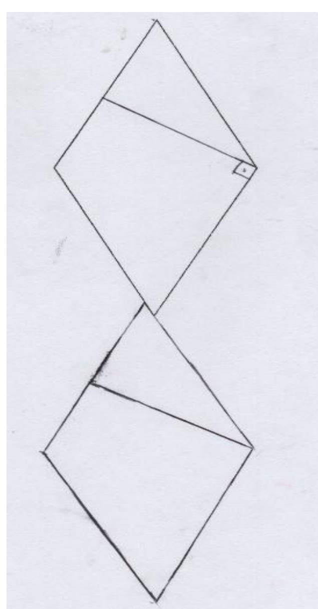


Figura dada (sin el trazo de la altura)

Reproducción de la anterior, realizada por un estudiante.

Este procedimiento muestra un trazo sobre la figura de base que permite reproducir el rombo, al menos la parte superior del mismo, ya que de la parte inferior no hay trazos auxiliares que garanticen su construcción. Independientemente de los procesos de visualización necesarios para que estos trazos surjan, se ve la potencia que tienen estos trazos como estrategias que apoyan la identificación de propiedades en las figuras.

La construcción de figuras, o su utilización heurística, solo tiene sentido en la medida en que apoye la visualización matemática. En particular, la utilización heurística de una figura depende de la capacidad de ver los trazos reorganizadores posibles para una figura dada. Lo anterior implica que aunque se cambie el tipo de enunciados que acompaña una figura hay algunos elementos de lo visualizado que no cambian; hay ciertas *gestalt*, ciertas organizaciones, que van a predominar. En razón de lo anterior es que se deben conducir aprendizajes relacionados con las formas de ver una figura; lo cual no conlleva a que se deba abandonar una reflexión sobre el tipo de enunciados que han de emplearse o sobre las operaciones discursivas que han de potenciarse en el aprendizaje de la geometría.

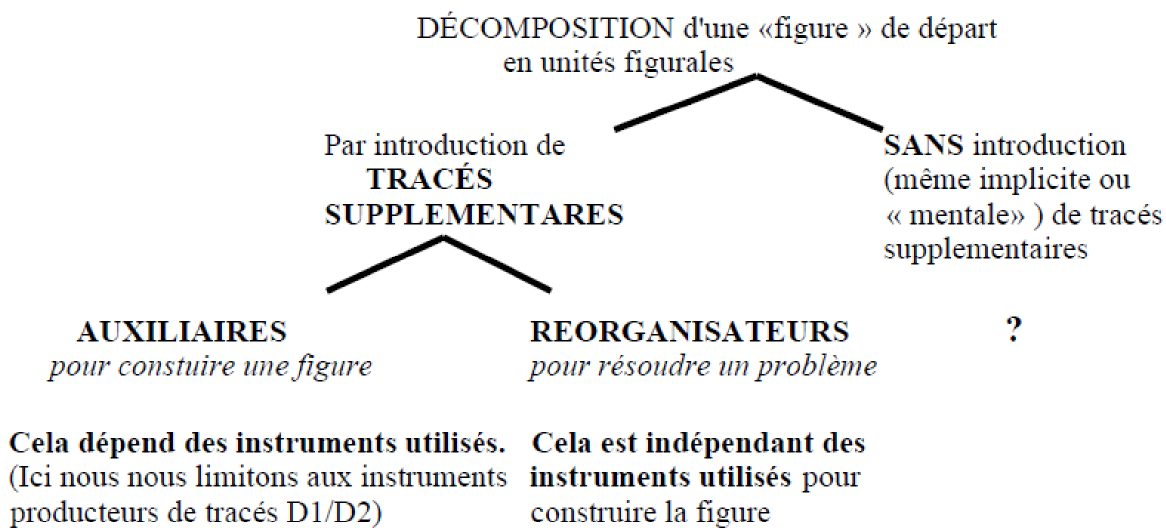


Ilustración 1. Duval 2005 p.13. Formas de descomposición de una figura.

Dichos aprendizajes, aquellos que conducen a superar la evidencia perceptiva, han de llevar a los estudiantes a desarrollar estrategias de exploración visual de las figuras. La construcción con ayuda de instrumentos será el primer paso en la búsqueda de actividades que apoyen la constitución de las figuras como representaciones de objetos geométricos con propiedades.

En las actividades propuestas a los estudiantes se ponen en juego dos tipos de instrumentos de construcción: convencionales y no convencionales (Duval, 2010). Los primeros son moldes o plantillas, que permiten reproducir líneas rectas o ángulos; también pueden ser usados para transferir medidas de segmentos. Tienen como característica central el hecho de permitir un solo trazo característico, un lado y dos ángulos fijos adyacentes a este o un ángulo particular, por ejemplo. Se usan en diversas combinaciones en cada una de las actividades, una plantilla de un ángulo y el molde que produce líneas rectas, dos moldes, etc. Se espera que su uso active en los estudiantes diferentes reflexiones que los lleven a nuevas formas de visualización.

Los segundos, la regla y la escuadra tradicional, se usan de manera usual; aunque la escuadra puede verse como el molde que permite trazar un ángulo recto. La regla también servirá para trasportar medidas, aunque seguramente se usarán medidas tomadas con dicha regla, se espera que esto no altere significativamente el uso del instrumento.

Dentro de las tareas de construcción se pueden señalar las de reproducción. Estas tareas imponen la deconstrucción instrumental de las formas visuales reconocidas, esto es, frente a la tarea de reproducir una figura, un triángulo por ejemplo, el estudiante debe poder descomponer su visión del triángulo en primitivas asociadas a los instrumentos de los que dispone. Cuando se le da una plantilla que contiene un ángulo, que coincide con uno del triángulo a reproducir, este ahora es visto como formado por dicho ángulo y otros trazos, es decir, en la reproducción se iniciará con el ángulo y luego se exploran otras estrategias para finalizarla.

2.2.3 Razonamiento

El término razonamiento, como muchos otros en didáctica de las matemáticas, tiene múltiples acepciones y asociaciones en posturas teóricas diferentes y hasta disímiles. A esta variedad habría que agregarle las particularidades de este término en el trabajo en geometría en general y en esta propuesta de trabajo en particular. Se puede empezar por esta última parte; los diseños de situaciones que este trabajo propone no asumen el desarrollo de formas particulares de razonamiento (en cualquier acepción que se asuma), toda vez que se entiende que un trabajo tal supera ampliamente las posibilidades del mismo; sin embargo sí se espera estudiar las producciones discursivas de los estudiantes al momento de presentar una solución. Para el estudio de estas producciones discursivas es que se proponen las siguientes consideraciones en relación con el razonamiento en geometría.

En el trabajo en geometría se puede considerar al razonamiento como un conjunto de proposiciones que se producen con el fin de presentar un punto de vista en relación con una situación particular, la solución a un problema o las razones por las cuales se dio un tipo respuesta; estas se dan en el contexto de la comunicación ordinaria de un salón de clases, por ejemplo. También se encuentran en el trabajo en geometría formas específicas de razonamiento asociadas a un discurso teórico, en las cuales la deducción de proposiciones que tienen un estatus específico dentro del marco teórico que se haya establecido, se hace con base en determinadas reglas y condiciones particulares, ya no propias de la que se ha llamado una comunicación ordinaria.

Al estar centrado este trabajo en el inicio de la educación básica secundaria se espera que el tipo de razonamiento que se encuentre en los estudiantes esté asociado al primer tipo señalado; se sabe que el desarrollo del segundo tipo de razonamientos, o algunas formas de este, se puede proponer como una tarea para el final de la escuela; es posible encontrar varios trabajos que se dedican a este asunto (Duval, 1991, 1993, 2000; Samper, 2001 -por señalar solo algunos).

Sin embargo, y dejando latentes las complejidades del segundo tipo, es claro que la descripción de las particularidades del primer tipo son al menos igual de complejas. En este se encuentran diferentes funciones a las cuales los estudiantes han de recurrir para la elaboración de su discurso en clase; el desarrollo de estas funciones en geometría requiere de formas discursivas con las cuales se pueda identificar los objetos y relaciones de los que tratan la geometría, además se necesitan formas que permitan hacer afirmaciones que involucren dichas relaciones y objetos, para luego con estas organizar las descripciones o explicaciones asociadas a la actividad geométrica realizada.

En el estudio de la geometría los estudiantes se ven enfrentados a una gran cantidad de términos que se emplean en esta área; al inicio de la educación básica secundaria ya se deben manejar varias decenas de términos distintos (Duval, 2005). Sin embargo, no es la cantidad el asunto que más interesa en este análisis, sino el hecho de que estos son diversos; solo para identificar los objetos es posible señalar cuatro clases de dichos términos. Se tienen aquellos que están asociados a un trazo visual: lado, diagonal, etc. Los que están asociados a una relación: paralela, perpendicular, simétrico, etc. Los que están asociados a una organización visual: segmento, triángulo, círculo, etc. Y los que están asociados a una propiedad: punto medio, isósceles, convexo, etcétera.

Los dos últimos tipos funcionan de la misma manera en matemáticas que por fuera de ella, en el sentido de cómo son usados para describir lo que uno ve. Los dos primeros tipos se usan de manera específica en matemáticas, ya que su funcionamiento se ubica entre el reconocimiento perceptivo inmediato de las formas y la identificación de los objetos matemáticos correspondientes a dichas formas. Además el uso de los otros tipos parece estar supeditado al uso de los dos primeros. Esta complejidad deja ver las dificultades iniciales a las que se enfrenta la sola operación de identificar un objeto en geometría.

Para la segunda clase de funciones que ha de cumplirse en el desarrollo de un discurso en geometría, decir algo en relación con los objetos ya identificados, el problema al que se enfrentan los estudiantes tiene que ver con el sentido de las proposiciones que se formulan. Este sentido no se consigue solamente a partir del conocimiento de los significados de las palabras o términos que se emplean para construir dichas proposiciones, asunto que como ya se vio tiene sus propias dificultades, pues el sentido no descansa necesariamente en una yuxtaposición de los significados individuales de los términos empleados, sino que se construye a través de un complejo conjunto de condiciones que regulan los intercambios comunicativos. Determinar si una proposición enunciada es verdadera o falsa, o si es al menos posible su afirmación en el contexto de una explicación, es un asunto que en geometría adopta condiciones particulares pues todos estos asuntos dependen de las relaciones que se establezcan entre dichas proposiciones y las figuras o los procesos que las acompañan.

Finalmente, se espera que los estudiantes usen estas proposiciones para construir explicaciones o descripciones de sus procedimientos de solución, para comunicar a otros la forma en que resolvieron un problema, y que dicho procedimiento pueda ser sometido a la revisión o valoración de sus compañeros o del profesor. Estos serían los razonamientos propiamente dichos de los que trata este apartado; pero se ha visto que solo los requerimientos previos a la formulación de estos razonamientos ya hacen compleja la actividad discursiva en geometría.

Una de las principales fuentes de dificultad a la que se enfrenta la elaboración de estos razonamientos tiene que ver con que ellos se han de producir en una interrelación con la visualización. Lo que se ve determinará las posibilidades de formular un razonamiento. Pero se ha mostrado (Duval, 2005) que las formas que se reconocen en dos dimensiones, por ejemplo, se han de nombrar con términos que aluden a una dimensión, y viceversa: lo que se define usando términos de una dimensión se identifica visualmente con objetos de dos dimensiones. Es decir, frente a la imagen de un cuadrado, una definición del mismo diría "…está formado por cuatro lados…", no hay correspondencia entre las dimensiones que se usan en el discurso y las que se perciben en la visualización.

Se tratará entonces de identificar las formas en que los estudiantes logran cumplir estas funciones al momento de expresar sus desarrollos en clase de geometría. Se asume que no hay en las actividades una propuesta para el desarrollo de dichas funciones sino que se espera solamente recoger información que permita caracterizar su uso.

2.2.4 Procesos cognitivos puestos en juego en las actividades

Las condiciones cognitivas para el aprendizaje de la geometría se constituyen en el centro del diseño de las actividades en este trabajo. Se afirma en particular que la visualización y la producción de enunciados en geometría requieren de funcionamientos cognitivos que son diferentes y más complejos que cuando se usan por fuera de la geometría. Es por esto que su desarrollo y coordinación deben ser considerados como objetivos de enseñanza tan esenciales como los conocimientos matemáticos mismos. Porque en la geometría la comprensión de los contenidos no puede ser construida sino a partir de una sinergia entre visualización y lenguaje (Duval, 2004), la cual se asume en este proyecto mediada por las actividades de construcción.

Así, la visualización tiene que ver con las posibilidades de reconocimiento de configuraciones visuales regidas por leyes particulares del registro semiótico de las figuras, y con diversas formas de aprehensión (perceptiva, discursiva, operatoria) de dichas figuras que están ligadas, en cada caso, a la percepción, al discurso en lengua natural y a las posibilidades heurísticas de las figuras. Esta operación se constituyó en el centro de la propuesta para el diseño de situaciones de clase; todas las actividades diseñadas ponen en juego esta operación. Se inicia con un trabajo que procura hacer avanzar a los estudiantes de la visualización icónica a la no icónica, y se termina con la formulación de una propuesta de trabajo que haga entrar a los estudiantes en la aprehensión operatoria, en particular, que puedan desarrollar modificaciones mereológicas sobre las figuras y finalicen con formas de ver las figuras que les permita la deconstrucción dimensional de las mismas.

La construcción tiene que ver con los procesos de objetivación necesarios para darle sentido a las representaciones de los objetos geométricos. Tales procesos aparecen en las acciones que se pueden realizar sobre estos mediante los procesos de construcción guiados por diversos instrumentos: lápiz y papel, reglas, moldes o algún software; las posibilidades de mediación semiótica se sustentan inicialmente en mediaciones instrumentales.

En el diseño de las actividades de este trabajo se inició con tareas de reproducción, como una forma de construcción que ha de apoyar la consideración de las figuras, por parte de los estudiantes, como constituidas como tales gracias a que tiene ciertas propiedades geométricas; esto a su vez apoya el reconocimiento de las posibilidades de tratamiento sobre las figuras que harán aparecer propiedades que no estaban explícitas, y finalmente se consideró a la construcción como una forma potente de lograr los primeros avances en la visualización, señalados arriba.

El razonamiento tiene que ver con el conjunto de *demarches* discursivas que aparecen en la actividad con geometría, desde las primeras tareas de reconocimiento y determinación de las propiedades de las figuras a través de los enunciados que las acompañan hasta aquellas que organizan y dan sentido a los argumentos y demostraciones que validan la producción de nuevos resultados. La actividad geométrica que es interesante desde un punto de vista cognitivo es aquella que es discursiva, es decir, aquella que se sustenta en una organización compleja de estatus teóricos para las proposiciones que involucra dicha actividad, y tal organización depende del reconocimiento y puesta en marcha de procesos de razonamiento (Duval, 2004b).

En el diseño de las primeras situaciones, en particular la 3, el razonamiento aparece en términos de reconocer las posibilidades de comunicación que los estudiantes han construido hasta el momento, en relación con la expresión de sus procedimientos y formas de actuación en las tareas propuestas; en el diseño de las últimas tres situaciones se propone como una herramienta fundamental para el desarrollo de procedimientos y soluciones a los problemas propuestos; en particular se proponen las operaciones de designar, describir y explicar como las que han de caracterizar los desempeños de los estudiantes.

Entre estos tres procesos se tejen relaciones diversas y complejas: ciertas construcciones requieren de procesos complejos de visualización y sin embargo esta no depende de la construcción ya que se accede a las figuras independientemente del proceso que llevó a su construcción, por ejemplo. El punto importante es que el aprendizaje de la geometría requiere de su coordinación, la cual se fundamenta en el desarrollo independiente de cada uno de estos procesos, en momentos y con acciones distintas, es decir, se requieren aprendizajes diferenciales en cada uno de estos procesos para que finalmente se les pueda poner en comunicación para favorecer la actividad en geometría.

2.3 Trayectorias de aprendizaje

El concepto de trayectoria de aprendizaje tiene ya al menos 20 años. Se usó para dar forma a un trabajo que articulara las maneras en que las concepciones de los estudiantes progresan de un estado informal hacia uno más elaborado. Siendo un concepto tan nuevo, como ocurre con tantos otros en educación matemática, no se encuentra aún un consenso entre los miembros de la comunidad en relación con su definición y alcance. En este trabajo se parte de la acepción de trayectoria de aprendizaje dada por Confrey & Maloney (2009)

> … a researcher-conjectured, empirically-supported description of the ordered network of constructs a student encounters through instruction (i.e., activities, tasks, tools, forms of interaction and methods of evaluation), in order to move from informal ideas, through successive refinements of representation, articulation, and reflection, towards increasingly complex concepts over time. (p. 347)

Al estar fundamentada en dos perspectivas, una sociocultural y una psicológica, la idea de trayectoria de aprendizaje hace énfasis en que la comprensión de los estudiantes está influenciada por el proceso de enseñanza en el que ellos están inmersos (sociocultural) y que asimismo dicha comprensión está basada en una organización de las experiencias individuales de los estudiantes (psicológica). Es decir, se postula como una propuesta que intenta darle un lugar a la organización adecuada del proceso de enseñanza y al mismo tiempo reconoce las particularidades que el aprendizaje tiene para los estudiantes en una disciplina específica. Esta dualidad es fundamental al momento de planear y ejecutar las diferentes componentes de la trayectoria de aprendizaje.

Las trayectorias de aprendizaje se han empleado como fundamento en diversos trabajos. Confrey et al (2012) reportan su progreso en construir evaluaciones diagnósticas diseñadas alrededor de trayectorias de aprendizaje que fomentan el aprendizaje de los estudiantes. En su trabajo diseñan una plataforma de evaluación para el salón de clase. Se rescatan de esta reflexión las tres funciones claves que señalan para las evaluaciones en el salón de clases: monitoreo curricular, evaluación formativa, evaluación diagnóstica. Clements, D., Wilson, D., & Sarama, J. (2004) crean una trayectoria hipotética de aprendizaje basada en investigaciones previas sobre la composición de figuras geométricas en estudiantes de preescolar, además diseñan instrumentos para identificar el progreso de los estudiantes en dicha trayectoria; emplearon diversos métodos como la investigación acción con profesores y estudios que involucraban un amplio grupo de estudiantes; reportan el avance de los estudiantes en el desarrollo de habilidades para componer y recomponer figuras bidimensionales.

Otros estudios, como el de Wilson, Mojica y Confrey (2013), formulan un conjunto de trayectorias para trabajar con profesores en formación como un curso de métodos de enseñanza. Con ellas se mostraba como estas trayectorias pueden ser usadas para que los profesores en formación aprendan sobre los procesos de razonamiento de sus futuros estudiantes; basados en el hecho de que estos profesores no tenían experiencia con el trabajo en clase, la conjetura afirmaba la dificultad que ellos enfrentarían al intentar describir dichos procesos de razonamiento. Muestran finalmente que el trabajo con estas trayectorias y conjeturas apoya la construcción de modelos para los tipos de razonamientos que pueden desarrollar los estudiantes.

Las nuevas aproximaciones para el trabajo en clase de matemáticas han buscado que este trabajo, organizado y dirigido por el maestro, permita estimular las ideas matemáticas de los estudiantes a través de tareas cuidadosamente seleccionadas, en ambientes de clase en los que se alienta a los estudiantes a intercambiar sus ideas, con un compañero o con la clase en general y con el profesor, como una estrategia que les ayude a darle sentido a las mismas. Además, ponen especial atención a la comprensión que van alcanzando los estudiantes de los temas en estudio como un elemento más en la planeación de las actividades de clase. Por lo anterior, el conocimiento que tenga un profesor de estas formas de trabajo se considera fundamental para el éxito de estas nuevas aproximaciones. Las trayectorias de aprendizaje se constituyen así en un mecanismo potente de poner en acción todas estas consideraciones y por lo tanto en un recurso valioso para los profesores.

En ellas el profesor tiene un papel central en el proceso en la medida que es él quién orienta el trabajo con las tareas y herramientas que se diseñaron –para el experimento de clase; es quien da forma y garantiza las diferentes interacciones discursivas en el salón de clase, al fomentar el uso del lenguaje necesario para construir y presentar ideas, sugerir nuevas formas de enfrentar un problema, señalar errores y ofrecer alternativas de trabajo, etc. Las trayectorias de aprendizaje pueden proveer a los maestros con una estructura que apoya sus capacidades para atender el progreso de sus estudiantes, ya que permite ajustar la enseñanza a las particularidades de su clase y conseguir los desarrollos conceptuales propuestos.

Wilson et al (2013) afirman que las trayectorias de aprendizaje permiten estructurar ideas generales para el trabajo en clase y al mismo tiempo tienen la flexibilidad que permite hacer adecuaciones a las particularidades de algunos grupos. De esta manera las trayectorias pueden asociarse con los estándares, apoyar la organización curricular, en general pueden apoyar el trabajo del profesor. Estas pueden describir el aprendizaje de los estudiantes como un proceso que va señalando los desarrollos de los estudiantes, como un conjunto de posibilidades mas no como un grupo de prerrequisitos.

Reconocen la experiencia de los estudiantes como un recurso que debe ser usado en la planeación de las actividades; permiten tener en cuenta las exigencias lógicas de las matemáticas al mismo tiempo que las exigencias cognitivas para el desarrollo de los conceptos. Se reconoce una relación directa entre el aprendizaje de los estudiantes y los procesos de enseñanza en los que ellos participan; este aprendizaje no se desarrolla de manera espontánea sino a través de la participación de los estudiantes en experiencias cuidadosamente diseñadas. Esta participación se aprovecha mejor en la medida en que los profesores comprendan el pensamiento matemático de sus estudiantes.

Al estar basadas en evidencia empírica y teórica sobre las formas en que se desarrolla el aprendizaje de los estudiantes, en este caso la propuesta para el aprendizaje de la geometría en relación con las actividades cognitivas que requiere dicho aprendizaje, pueden asegurar mayor coherencia en una propuesta de trabajo en clase; además las trayectorias permiten una organización curricular que establece conexiones entre estándares lo cual apoya dicha coherencia.

Todos estos elementos se pondrán en juego para el diseño de dos trayectorias de aprendizaje en el desarrollo de este proyecto. La primera se diseña e implementa y cuyo análisis da los elementos necesarios para la formulación de una segunda trayectoria, que se deja como propuesta para ser revisada y evaluada en futuros proyectos.

CAPÍTULO 3. FUNDAMENTOS METODOLÓGICOS DEL PROYECTO

Se asumieron las metodologías cualitativas de investigación como el escenario en el cual buscar la orientación metodológica que se ha de desarrollar en este proyecto. Un punto importante en estas metodologías es que permiten interpretar ampliamente fenómenos que se presentan en contextos particulares y dar una mirada integral de la situación en estudio mediante el establecimiento de relaciones entre los elementos de dicho fenómeno, lo cual, a su vez, permite avanzar en la construcción de explicaciones.

Dentro del espectro de posibilidades que se abre en los estudios cualitativos, se propone inicialmente explorar los Experimentos De Enseñanza como una alternativa sobre la cual esbozar el trabajo de este proyecto. Se presentan en este capítulo las particularidades de esta metodología de trabajo. Se hace una descripción de algunos de los elementos que participan en el desarrollo del experimento: las conjeturas, sus dimensiones, y las trayectorias de aprendizaje sobre las cuales todos estos se ponen en juego.

Finalmente se presentan los diseños de las situaciones que componen la primera trayectoria; se presentan las tareas que conforman las actividades que se incluyeron en cada una de las situaciones, haciendo explícitas sus particularidades y las formas de actuación esperadas, es decir, las hipótesis en relación con el funcionamiento de la trayectoria.

3.1 Los experimentos de enseñanza

Con base en el trabajo de Cobb (2000), se presentan los elementos que se considera sustentan esta aproximación. Se trata de una metodología que provee maneras de explorar las posibilidades de investigar lo que a partir de la propuesta de enseñanza del profesor ocurre con el aprendizaje de los estudiantes y con los cambios que se dan al nivel del salón de clase.

A partir de lo anterior son varias las cuestiones que se pueden abordar con esta metodología: estudiar el grado en que la participación de los estudiantes en actividades de clase, ya sea en discusiones en clase o en pequeños grupos, soporta sus aprendizajes en matemáticas; estudiar la actividad del profesor y las maneras en que puede mejorar su interacción con los estudiantes; revisar las actividades que el maestro propone a sus estudiantes y las construcciones potenciales del estudiante en la clase a partir de estas; o, desarrollar constructos teóricos que permitan entender lo que ocurre en el salón de clase.

Este proyecto se inscribe en esta variedad de opciones de trabajo con los experimentos de enseñanza, el cual intenta poner en acción las propuestas que para la enseñanza de la geometría se desarrollaron en el marco teórico. Se trata de una metodología que posibilita que a la vez que se mide el impacto del experimento de enseñanza en la formación de los estudiantes, se extrapolan recomendaciones para el ajuste y posterior continuación de la propuesta.

Cuando se trabaja con esta metodología el investigador debe estar presente en las actividades de clase. En el trabajo que se presenta, el profesor de clase es parte del equipo que acompaña la investigación. El diseño no podrá ser definitivo, en el sentido que seguramente estará sujeto a modificaciones o adaptaciones provenientes de las discusiones que se adelanten respecto de los desarrollos de los estudiantes. Estas discusiones hacen parte del primer análisis que se hace de la implementación, análisis “local”, que toma en cuenta los pormenores de la implementación del experimento.

Con lo anterior se tiene lo que caracterizan el diseño y la puesta en el salón de clase del experimento de enseñanza. Se necesita, además, presentar algunos elementos que perfilen el análisis que sigue de estas acciones. Se denomina un análisis “retrospectivo” al que ubica los eventos ocurridos en el salón de clase en un contexto teórico amplio, y que permite la comparación o el contraste, como estrategias de interpretación, por ejemplo. En este, el investigador puede regresar, revisar y reflexionar sobre lo ocurrido en el salón de clase cuando se implementó el experimento. Los hallazgos se pueden comparar con casos paradigmáticos, con los supuestos iniciales e hipótesis y con los fundamentos teóricos que estaban en la base del diseño.

Se presenta a continuación una descripción de algunos de los componentes de los experimentos de enseñanza; en particular, se hacen precisiones en relación con las decisiones y ajustes que de esta metodología se hicieron en el desarrollo de este proyecto.

3.1.1. Generalidades

Se asume que la investigación en educación matemática cumple una amplia variedad de propósitos. No es corta la lista de elementos que se abordan actualmente en el campo y asimismo el tipo de miradas que se dan de dichos elementos; basta con revisar los temas de algunos congresos nacionales e internacionales (22 temas ocuparon las discusiones del CIAEM, 2015) o los números recientes de algunas publicaciones, para darse cuenta de que aunque el campo es relativamente nuevo, es un campo amplio y prolífico.

En este contexto de trabajo se reconoce sin embargo que es necesario profundizar en las investigaciones del salón de clases de matemáticas de corte un poco más especulativo (Confrey & Lachance, 2000), en relación con algunas tendencias más cualitativas o en las que las condiciones particulares de los entornos reales de los salones de clase se restringen; una investigación en las que algunas de las restricciones se "relajen" mientras que otras se mantengan. De entre los trabajos más reconocidos en este ámbito se encuentran los de Cobb (2000) y sus colaboradores, los cuales han propuesto un modelo de diseño de investigación que utiliza las condiciones comunes y naturales propias de un salón de clase, acompañada de elementos teóricos para crear e investigar nuevas estrategias educativas.

Las estrategias desarrolladas a través de este tipo de trabajos de investigación son pensadas para cambiar y reformar las prácticas de enseñanza, asunto que llama la atención para este trabajo pues propone maneras alternativas para el desarrollo de la clase de geometría del Colegio Jefferson. Sin embargo, el asunto central de dichos trabajos es que se presentan como una forma de acercarse al estudio de las clases de una manera que permite establecer una mejor conexión entre la teoría y la práctica.

Así, los experimentos de enseñanza están motivados por el compromiso del investigador en prestar especial atención a las interacciones de los participantes de la clase, pues en estas seguramente aparecen concepciones e interpretaciones fundamentales para los propósitos de la investigación. Quiere decir entonces que la toma de registros de observación, las conversaciones guiadas por entrevistas, entre otros, serán aspectos que se tienen en cuenta al momento de recoger información, de capturar las interacciones. En ese sentido, las grabaciones en video y los registros de observación de las clases son herramientas fundamentales, tanto como los materiales de las actividades desarrolladas por los estudiantes.

En la realización del experimento de enseñanza se identifican dos niveles: un micronivel y un macronivel (Cobb, 2000). En el primero se encuentra el experimento de enseñanza en el momento en que fue pensado y se hicieron ciertas anticipaciones, junto con los elementos previstos para desarrollar la enseñanza, los cuales contemplan las actividades de clase planeadas y aplicadas. Se cierra este primer nivel con el análisis de la implementación de dichas actividades, un análisis local que permite identificar lo que ocurre en clase y a partir de ahí desarrollar los ajustes para las actividades siguientes. Estos ajustes tienen que ver con los desarrollos de la conjetura, así como con ciertas características de las actividades.

En el segundo, el macronivel, se estudia toda la secuencia completa de enseñanza, todos los elementos que constituyeron la planeación del experimento y sus diversas actividades de clase así como los detalles de su implementación; se trata de crear conexiones, relaciones y explicaciones entre la teoría local que guió el diseño y la implementación de las actividades, para tratar de explicar la forma en que las trayectorias de aprendizaje y las conjeturas respondieron a lo esperado en el experimento de enseñanza; esto se realiza mediante un análisis retrospectivo.

El experimento de enseñanza inicia con la identificación de unas metas de aprendizaje y la forma en que el proceso de enseñanza puede ser realizado, así como una descripción de las maneras en que se espera discurra el aprendizaje (la *conjetura*). Lo anterior se concreta en la formulación de una *trayectoria hipotética de aprendizaje*, la cual ha de incluir una descripción coherente de cómo se desarrollará el aprendizaje de los estudiantes, es decir, precisar cómo el pensamiento y la comprensión de los estudiantes puede evolucionar con dichas actividades, lo cual permite ver que estos elementos están en una clara interrelación.

Aunque los aspectos sociales, en los que se funda el experimento de enseñanza, no aparecen de manera explícita en la planeación, se debe reconocer que un análisis puramente psicológico que caracterice el aprendizaje independientemente de la situación social en la que este toma lugar, es inadecuado cuando se diseñan y planean las situaciones. Sin embargo, en este trabajo los aspectos sociales del salón de clase estarán en general implícitos, o por lo menos no se harán referencias puntuales procedentes de análisis específicos de estos aspectos.

Este análisis de las características particulares de la metodología de experimentos de enseñanza, permitió establecer las condiciones para determinar una conjetura que guíe el experimento de enseñanza, los elementos que componen las trayectorias de aprendizaje y, finalmente, identificar propuestas teóricas y metodológicas en relación con la forma en que han de conducirse los análisis finales. Se presentan entonces los pormenores de dichos elementos del experimento de enseñanza.

3.1.2. Las conjeturas

Un experimento de enseñanza tiene varios componentes y etapas de desarrollo. Entre uno de los componentes se destaca *la conjetura*, la cual es una afirmación sobre los hechos del salón de clase que se basa en evidencias, tanto teóricas como experimentales, que recoge las creencias del equipo de investigación en relación con las formas en que se han de desarrollar los aprendizajes de los estudiantes. En particular, permite relacionarse con cómo las matemáticas deberían, para propósitos educativos, organizarse y conceptualizarse (Confrey, et al. 2000).

Su formulación intenta recoger elementos que apoyen nuevas maneras de aproximarse a un contenido matemático y las formas de llevarlo a clase; esta formulación adopta un carácter experimental y, a diferencia de una hipótesis, no se contempla como una afirmación que ha de ser probada. Se espera que dicha conjetura guíe el proceso de investigación, lo cual implica que los eventos que ocurren en el mismo pueden hacer cambiar la conjetura y de la misma manera se espera que ciertos cambios en la conjetura impliquen ajustes al desarrollo del proceso. En últimas, en el trascurso de la investigación la conjetura se revisa y se reelabora.

Confrey et al (2000) propone que en la formulación de una conjetura se deben tener en cuenta dos dimensiones; al estilo del ya conocido símil de la moneda, se afirma que una conjetura tiene dos partes diferentes pero estrechamente ligadas que se conjugan al momento de formularla. Se tienen entonces la dimensión del contenido de la conjetura y la dimensión pedagógica de la conjetura; la primera asociada a qué se debe enseñar y la segunda a cómo se debe hacerlo.

La primera dimensión establece el contenido matemático de la conjetura. No se formula necesariamente en términos de temas sino a partir de una descripción de los elementos que se consideran constituyen el aspecto matemático que se va a estudiar. La segunda, la dimensión pedagógica, al responder la pregunta de cómo enseñar dicho contenido, atiende cuestiones relacionadas con la organización del salón de clase, el tipo de tareas y actividades que se han de proponer o los recursos con los que dicha enseñanza debe realizarse.

Esta conjetura está ligada, como se menciona en su definición, al marco teórico que guía la investigación. Esta relación permite planear las actividades y la metodología que guían el experimento de enseñanza; además, por su vínculo con la experiencia, la conjetura queda situada en un escenario escolar particular. Las dimensiones de la conjetura permiten establecer relaciones entre la teoría y la práctica pedagógica; esto requiere una revisión y análisis cuidadoso de la literatura existente (Confrey, et al. 2000). Todos estos aspectos son una condición fundamental para el proceso de análisis que seguirá a la implementación del experimento de enseñanza.

La conjetura interviene además en la determinación y ajustes a la pregunta de investigación, así como en los métodos de recolección de datos. En este sentido, la conjetura recoge todos los aspectos que se señalaban para la investigación cualitativa.

Para este proyecto, la formulación de la primera conjetura responde a dos decisiones, cuya explicitación es necesaria para sentar una posición en relación con el grado de particularidad que se quiso introducir.

La primera decisión tuvo que ver con la redacción de una expresión general de la conjetura y sus dos versiones particulares para cada una de las dimensiones (de contenido y pedagógica); esta forma de presentar la conjetura no parece necesaria según lo revisado en la parte teórica. Sin embargo, se consideró pertinente que la primera formulación debería aparecer como una ratificación explícita del propósito de incluir consideraciones cognitivas en el diseño del experimento, y que las otras dos formulaciones de la conjetura aportaran a la claridad necesaria para el diseño de las situaciones.

La segunda decisión tuvo que ver con el grado de generalidad de las dimensiones. En la dimensión del contenido se recoge, con la formulación presentada y de manera general, una descripción que abarca la totalidad de los sistemas geométricos que propone el MEN. Pensar que un experimento de enseñanza, incluso varios, puedan dar cuenta de todos estos elementos sería ingenuo, pero lo que se busca con tal formulación no es comprometerse con tal cantidad de trabajo sino, de nuevo, fijar un posición en relación con precisar que el tipo de geometría que se trabajará se puede identificar a partir de la propuesta que ha formulado el MEN para la matemática escolar. En la dimensión pedagógica aparecen varios procesos complejos y en cuyo desarrollo intervienen diversos elementos; esto se consideró como una potencialidad en el sentido de que con base en esta conjetura se pueden formular otras conjeturas, más particulares y asociadas de manera directa con las tres situaciones que vinculan con ella. Se presentan las formulaciones mencionadas:

Conjetura: *La formulación de una propuesta de enseñanza de la geometría escolar debe atender criterios cognitivos, es decir, tener en cuenta las exigencias que la actividad geométrica hace a quien la aprende.*

Dimensión del contenido ¿qué enseñar?: *El desarrollo del pensamiento espacial al inicio de la educación básica debe atender la representación de figuras bidimensionales, sus* *transformaciones y relaciones espaciales; además, el uso de la lengua para expresar propiedades, formular y defender argumentos y resolver problemas. Los tópicos de geometría que se han de desarrollar tienen que ver con las dimensiones y las relaciones: en las primeras se tiene en cuenta las líneas paralelas y perpendiculares, los polígonos y la circunferencia. En las segundas, las relaciones de semejanza y congruencia y los diferentes tipos de transformaciones.*

Dimensión Pedagógica ¿cómo enseñar?: *Las actividades cognitivas que comandan este trabajo son: la visualización, en el desarrollo de aprehensiones perceptivas, operatorias y discursivas que permitan la génesis de la deconstrucción dimensional; el razonamiento, en particular el estudio de diferentes operaciones discursivas propias al discurso geométrico; y, la construcción, en cuanto al reconocimiento de las características constituyentes de una figura a partir del empleo de diversos instrumentos.*

La formulación de esta conjetura procuró atender a las características que se presentaron para las mismas; esta formulación recoge el estado final de la conjetura con la cual se desarrolló el experimento de enseñanza. Con la conjetura propuesta, se puede ahora pensar en las actividades y en la metodología de su implementación en el aula de clase, es decir, sentar las bases para la fase de implementación del experimento de enseñanza.

3.1.3. Desarrollo de los experimentos de enseñanza

El campo de la educación matemática ha entrado en un nuevo periodo; se han producido diversos cambios en la manera en la que el conocimiento matemático se entiende. Los educadores matemáticos buscamos entender la experiencia matemática de nuestros estudiantes, al considerar su actividad matemática en el contexto de la enseñanza como una manifestación de su razonamiento y comprensión. Por ello un experimento de enseñanza se realiza para conocer de primera mano el razonamiento y el aprendizaje matemático de los estudiantes. Se asume que hay un conocimiento matemático que le es propio, particular, a cada estudiante, el cual es distinto del que tiene el investigador. La tarea del investigador es identificarlo (Cobb, 2000).

Steffe y Thompson (2000) proponen como base de la investigación entender este conocimiento, como una forma de intervenir de manera más significativa en el aprendizaje de los estudiantes. Además se propone que los fundamentos conceptuales de las matemáticas escolares pueden estar basados en los conocimientos matemáticos que los estudiantes desarrollan, es decir, la organización de los aprendizajes escolares se puede fundamentar en lo que los estudiantes saben y en lo que deben aprender. Así pues, la realización de un experimento de enseñanza juega un papel central en el alcance de esta propuesta, ya que sus características están en una relación estrecha con estas nuevas miradas sobre el trabajo de clase de matemáticas.

La planeación del experimento se inicia con la determinación de los contenidos o áreas que serán cubiertos con el desarrollo de la intervención en clase; en esta parte es importante tener en cuenta lo que el profesor, y el colegio, tienen planeado para trabajar con los estudiantes. Aquí la conexión con la conjetura se hace explícita en el sentido de que esta ha de influir en la selección, sucesión y duración de lo que se ha de trabajar en clase; de la misma manera, el carácter experimental de la conjetura, ha de permitir cierta flexibilidad para que el equipo de investigación pueda hacer adecuaciones de acuerdo con las intervenciones de los estudiantes en el transcurso del experimento.

La planeación debe atender también las formas de trabajo en clase; se trata de responder a la pregunta sobre cómo se estructurará la intervención en el salón de clase. Para ello se recurre a los elementos teóricos que guiaron la formulación de la conjetura, los cuales apoyan la toma de decisiones en relación con cómo organizar a los estudiantes, al tipo de problemas o situaciones que enfrentarán, los materiales que se diseñarán para el trabajo de los estudiantes, etc. Las actividades, que en este trabajo se agrupan en situaciones, determinan los modos de recolección de la información. Como ya se presentó anteriormente, las técnicas de observación de clase y el registro de las mismas se constituyen en los métodos que se han de privilegiar para esta recolección de información.

En el experimento de enseñanza se cuenta con la participación del profesor de los estudiantes, que al mismo tiempo es parte del equipo de investigación que conduce dicho experimento. En particular, en este trabajo el profesor organizó tanto la planeación de las clases de los estudiantes como los elementos de la trayectoria, pues comparte intereses investigativos y de formación de sus estudiantes, en relación con el desarrollo de este trabajo. Luego su rol era el de guiar tanto la planeación de las intervenciones en clase y el desarrollo de la investigación, en una labor compartida con el equipo que se conformó para efectos del desarrollo del experimento de enseñanza.

Gran parte de la información que resulta de la implementación del experimento de enseñanza es analizada por el equipo de investigación, en particular en los análisis locales, pues se asume que la participación de un grupo amplio de personas permite dar una mirada más completa tanto a los diseños como a las interacciones que ocurren en su implementación. En el caso particular de este trabajo, se propuso que de los análisis locales, en la primera fase del estudio, se hicieran reportes independientes a partir de dos trabajos de grado de la licenciatura, y que del reporte de los consolidados y del análisis retrospectivo se diera cuenta en el presente informe. De estos detalles se hará mención más adelante en el documento.

3.1.4 El análisis de los datos

En un experimento de enseñanza los análisis que se realizan son de dos tipos, y se ajustan a los dos grandes momentos propuestos para dichos experimentos. El primero, análisis local, se realiza sobre la marcha del experimento y se combina con el análisis preliminar de las tareas que se emprendió con la formulación inicial de la conjetura. Se trata sobre todo de someter a análisis los diseños, de tal manera que se puedan hacer los ajustes necesarios para continuar con el experimento. Al mismo tiempo, ir obteniendo información sobre el desempeño de los estudiantes con la cual se pueda estudiar el funcionamiento de la conjetura.

El segundo, análisis retrospectivo, tiene lugar después de la implementación de todas las situaciones que componen el experimento de enseñanza; se basa en toda la información recogida, que seguramente será depurada con las herramientas de análisis que se definen en la metodología, además emplea tanto la información como los resultados de los análisis locales; este último análisis intentará dar cuenta del desarrollo final del experimento, las características que adoptó la trayectoria de aprendizaje puesta en juego y debe dar indicios sobre las posibles implicaciones que, para los diseños en particular y para las trayectorias de aprendizaje en general, tuvo la realización del experimento de enseñanza.

El análisis de las actividades explora asuntos cuantitativos de la actividad de los estudiantes, revisando cuestiones como el desempeño general de la clase frente a las actividades o las características de algunas de sus respuestas; y también explora asuntos cualitativos como describir los métodos empleados por los estudiantes y las posibles inferencias que de ello se pueda hacer en relación con su comprensión de lo propuesto. Como parte final de este análisis se espera construir una narración coherente del desarrollo de las ideas de los estudiantes y su conexión con la conjetura. Los capítulos siguientes de este trabajo tendrán por meta presentar dicha narración.

Se asume entonces que la investigación de diseño es efectivamente un elemento significativo para la investigación educativa, lo que hace a este tipo de estudios un modelo de investigación válido y significativo en general (Molina, M., Castro, E., Molina, J. y Castro, E., 2011) dado que el diseño es regulado por una conjetura explícitamente formulada y bien desarrollada. La adecuación de este trabajo y la calidad del mismo se deben buscar entonces en la descripción de la forma en que la conjetura guió el diseño, la práctica en el salón de clase y el análisis de los datos.

3.2 Diseño de actividades

La trayectoria de aprendizaje es una intervención planeada sobre un periodo de tiempo en un salón de clase. En su formulación interviene la conjetura, en sus dos dimensiones, ya que la conjetura determina algunas de las condiciones para la planeación de la enseñanza: los temas, métodos y el rol de maestro, por ejemplo.

La trayectoria de aprendizaje está constituida como una red ordenada de constructos en la que intervienen: actividades, tareas, herramientas, formas de interacción en clase y métodos de evaluación. Para el caso del primer momento de este trabajo se tiene:

Trayectoria 1: Caracterización de figuras geométricas

- Actividades. Construcción de figuras geométricas con instrumentos no estándar: moldes, rejillas, etc.
- Tareas: de reproducción, de descripción, de construcción.
- Herramientas: plantillas, moldes, reglas, etcétera.
- Formas de interacción en clase: taller, socialización, discusión, escritura.
- Métodos de evaluación: seguimiento al proceso.

Con base en esta trayectoria se diseñaron las situaciones del experimento de enseñanza que se presenta en el siguiente apartado. El conjunto de datos que se tienen de su implementación serán elementos centrales para el análisis retrospectivo; los resultados de este análisis, junto con los resultados de los análisis locales, harán parte de lo que sustentará la constitución de una nueva trayectoria. Este par de trayectorias han de sentar las bases para la determinación de un conjunto de estrategias de trabajo que permitan relacionar los estándares, la propuesta de trabajo del colegio y la perspectiva cognitiva como un elemento organizador de las actividades de clase.

Las trayectorias de aprendizaje, como se mencionó, contemplan varios elementos; sin embargo, el asunto central para este trabajo es la conjetura para orientar el diseño de las situaciones; la conjetura general, y sus dimensiones se presentaron en el apartado anterior. Se presentan ahora las conjeturas particulares de cada una de las situaciones y una descripción de las mismas.

La situación 1 surge como una adecuación de la propuesta de Duval (2010). Está constituida por cinco actividades en las que se emplean instrumentos de construcción no convencionales en tareas de reproducción de figuras. Se espera que con ella se puedan iniciar a los estudiantes en distintos tipos de miradas sobre las figuras; las actividades son todas de una formulación sencilla y por lo tanto su desarrollo no ha de implicar mayor impedimento a los estudiantes.

Conjetura: *El uso de instrumentos de construcción no convencionales permite que los estudiantes reconozcan las características y propiedades de una figura geométrica.*

Dimensión pedagógica: *Las actividades de reproducción de figuras constituyen un escenario ideal para que los estudiantes exploren las diferentes características de una figura geométrica.*

Dimensión del contenido: *Los triángulos tienen la característica de ser la figura más simple que contiene ángulos, los cuales son uno de los elementos claves para la determinación de las propiedades de una figura.*

La situación 2 consta de cinco actividades. Todas ellas tienen que ver con la reproducción de cuadriláteros empleando instrumentos convencionales (las escuadras[2]) y no convencionales (moldes y plantillas). Se buscó avanzar en el enriquecimiento heurístico de las figuras, para trabajar en la deconstrucción dimensional de formas, mediante la introducción de nuevas estrategias de construcción con la ayuda de un instrumento convencional.

Conjetura: *El recurso a trazos reorganizadores, usando instrumentos convencionales o no, permite que los estudiantes accedan a nuevas formas de visualización de una figura, la cual resalta características y propiedades de la misma.*

Dimensión pedagógica: *Las actividades de reproducción de figuras dan lugar a estrategias de construcción en las cuales aparecen trazos reorganizadores, los cuales han de apoyar el proceso de visualización heurística.*

[2] Se usan indistintamente los dos tipos de escuadras que hay en el mercado: una con ángulos notables de 30° y 60°, y otra con ángulos notables de 45°. Se propone el trabajo con ellas como escuadras no informadas, en el sentido que se plantea el uso del borde no informado.

Dimensión del contenido: *Los cuadriláteros tienen diversas opciones de clasificación en relación con sus propiedades: paralelismo o no de todos sus lados, o un par de ellos, junto la congruencia o no de los mismos.*

La situación 3 consta de tres grupos de actividades; en cada una de estas situaciones se daba una figura y la consigna era formular en lengua natural una serie de pasos que le permitan a quien lee o escucha dicho mensaje hacer la reproducción de la figura, conservando forma y tamaño. Se buscó establecer relaciones entre la visualización alcanzada por los estudiantes y los procesos discursivos que ellos han desarrollado hasta ahora en su escolaridad, es decir, se pedía que usaran la lengua natural para describir una figura y guiar una construcción.

Conjetura: *La descripción en lengua natural de los pasos para la construcción de una figura, como una variante de una tarea de reproducción, pone en juego procesos de designación y formulación de proposiciones, las cuales movilizan diferentes operaciones discursivas propias al discurso geométrico.*

Dimensión pedagógica: *la articulación entre discurso y figura en geometría, encuentra un escenario potente en las tareas de descripción de una figura con el propósito de ser reproducida por quien lee la descripción.*

Dimensión del contenido: *la clasificación de cuadriláteros es una actividad geométrica que pone en juego propiedades de los objetos geométricos y relaciones como paralelismo y perpendicularidad, así como nociones de congruencia.*

El análisis que se presenta a continuación de cada una de estas situaciones está asociado al diseño y consideraciones iniciales que se hicieron en el micronivel. Cada una de estas situaciones se implementó y el análisis local de dicha implementación guió el trabajo posterior; con el análisis retrospectivo, macronivel, de esta implementación se propone en el siguiente capítulo una nueva trayectoria y las situaciones asociadas.

3.2.1 La situación 1.

Esta situación está compuesta por 5 actividades. Todas las actividades son de reproducción de una figura, para lo cual se usan instrumentos de construcción no estándar (Duval, 2010); son tareas que exigen la producción de una representación gráfica que debe conservar las mismas propiedades que la figura dada. Estas propiedades aparecen inicialmente ligadas a la percepción, pues lo que guía la construcción que hacen los estudiantes es la aprehensión perceptiva de la figura que se ha de reproducir; sin embargo, las limitaciones impuestas por los instrumentos les ha de exigir una reflexión en relación con qué característica de la figura se puede reproducir dado un tipo particular de instrumento.

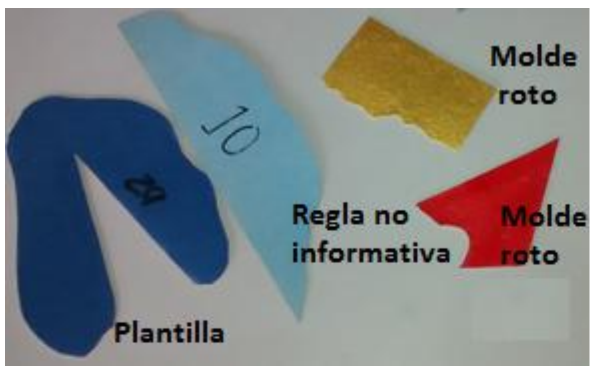


Ilustración 2. Instrumentos de construcción situación 1.

Hay aquí entonces una apuesta por la relación entre los procesos de construcción y visualización, en el sentido de que se espera que el trabajo en la construcción de las figuras apoye la génesis de una primera forma de la visualización matemática. Se espera que emerja de esta primera situación el reconocimiento de que las figuras se constituyen como tales gracias a ciertas condiciones que se imponen sobre sus elementos: desde el tamaño de sus lados, hasta las relaciones entre ellos que determinan ángulos.

Los elementos del sistema geométrico que aparecen directamente involucrados en esta situación son los *objetos* asociados a las figuras del triángulo y el cuadrado: vértices, lados y ángulos. En esta, como en las tres primeras situaciones, el estándar que se desarrolla es "Clasifico polígonos en relación con sus propiedades" que en la propuesta de trabajo de los estudiantes del colegio se expresa mediante los dos indicadores ya señalados.

En el marco del experimento de enseñanza en el cual se aplica esta situación se determinó una conjetura, ya presentada previamente, y las dos dimensiones de la misma, en la cual se intentó dejar plasmados los elementos y consideraciones que se acaban de señalar para esta situación. Se presentan nuevamente, para facilitar la lectura:

> Conjetura: El uso de instrumentos de construcción no convencionales permite que los estudiantes reconozcan las características y propiedades de una figura geométrica.
> Dimensión pedagógica: *Las actividades de reproducción de figuras constituyen un escenario ideal para que los estudiantes exploren las diferentes características de una figura geométrica.*
> Dimensión del contenido: *Los triángulos tienen la característica de ser la figura más simple que contiene ángulos, los cuales son uno de los elementos claves para la determinación de las propiedades de una figura*.

Todos los elementos anteriores orientaron la fase de diseño, en la cual se produjeron las siguientes 5 actividades.

<u>Situación 1. Actividad 1</u>

Esta situación tiene por propósito fundamental introducir a los estudiantes en el tipo de tareas que componen la situación, ya que no son tareas a las que ellos se hayan enfrentado. Se elige un cuadrado como figura de base, figura que al tener todos sus lados y ángulos iguales resulta simple para los estudiantes. El instrumento que se utiliza es un molde roto (de un cuadrado), que representa el ángulo recto y tiene un lado que sirve para replicar los cuatro lados del cuadrado.

Cada estudiante tiene una hoja con la actividad (Ilustración 3) y un molde en cartón. El profesor hace una presentación general de la consigna “Usando el instrumento que se te entregó construye el cuadrado que se muestra”, con el propósito de establecer acuerdos tales como que solo deben usar los instrumentos entregados, que pueden hacer preguntas y que su trabajo es individual, aunque habrá un espacio posterior para compartir algunas respuestas. Esto se repite en las demás actividades de la situación.

Colegio Jefferson
Fundado en 1963

MATEMÁTICAS 6°.
Geometría

Respeto y responsabilidad, la clave para mi crecimiento en Junior.

Profesor: Jorge Galeano

SITUACIÓN 1

ACTIVIDAD 1

Usando el instrumento que se te entregó construye el cuadrado que se muestra:

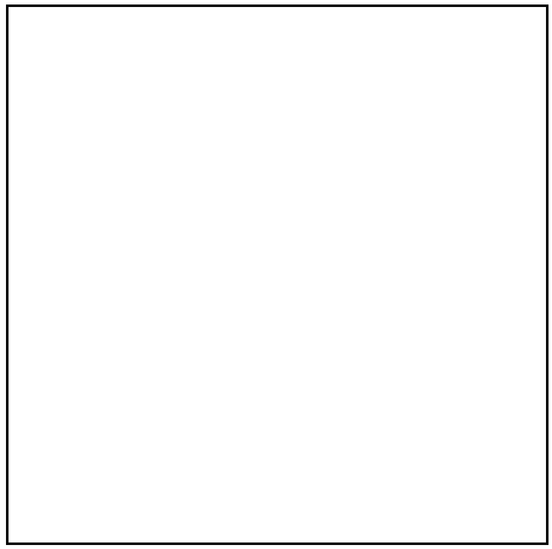


Ilustración 3. Situación 1. Actividad 1.

<u>Situación 1. Actividad 2</u>

En esta actividad, y en las siguientes, se usa como figura de base un triángulo. La consigna es la misma y se van variando los instrumentos. Los instrumentos son la plantilla y el modo roto (de un triángulo); se espera que los estudiantes usen ambos instrumentos en la construcción.

El molde roto es un instrumento que permite el trazo de la parte superior del triángulo dado (ángulos izquierdos del triángulo y parte de sus lados); la plantilla le permite al estudiante trazar el ángulo derecho del triángulo y completar los lados del mismo.

Ninguno de los dos instrumentos tiene toda la información para hacer una reproducción válida del triángulo: el molde obliga a interrumpir la continuidad del trazo del contorno cerrado de la figura, para completarlo, el estudiante debe usar la plantilla. Funciona del mismo modo si el estudiante decide usar primero la plantilla rota.

Colegio Jefferson
Fundado en 1963

MATEMÁTICAS 6°.
Geometría

Respeto y responsabilidad,
la clave para mi crecimiento
en Junior.

Profesor: Jorge Galeano

SITUACIÓN 1

ACTIVIDAD 2
Usando los instrumentos que se te entregaron construye el triángulo que se muestra:

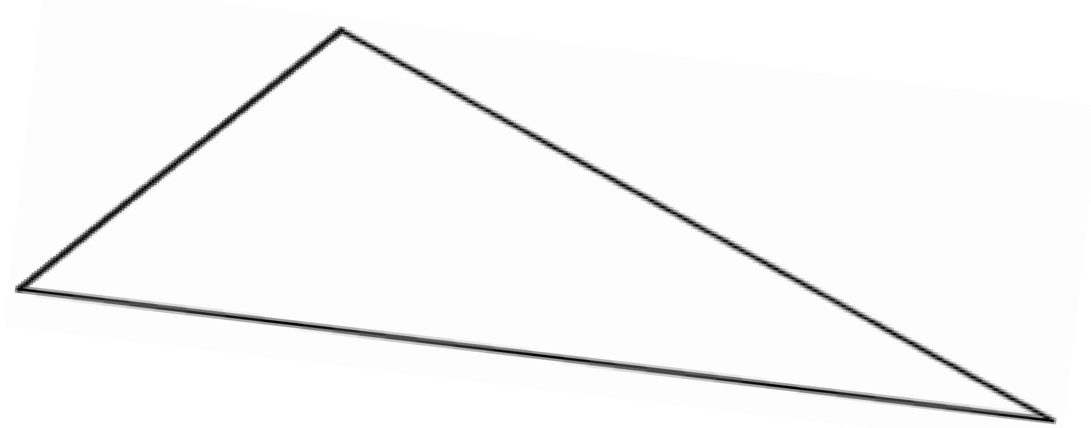
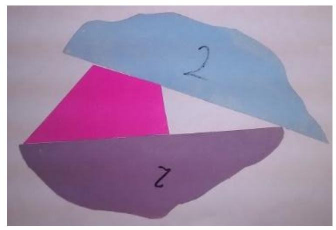


Ilustración 4. Situación 1. Actividad 2.

Se espera que el uso de estos dos instrumentos para reproducir el triángulo les sirva a los estudiantes para identificar en la representación del triángulo que éste está conformado por tres lados y tres ángulos; además, que cada uno de estos elementos tiene sus propiedades constitutivas como el tamaño y la orientación. Lo anterior habrá de apoyar el inicio de un proceso de reflexión en los estudiantes sobre la información que puede o no obtener de una representación.

<u>Situación 1. Actividad 3</u>

En esta actividad se usan tres instrumentos: el molde roto (del triángulo) y dos reglas no informativas. El molde roto, como en la actividad anterior, sirve para reproducir una parte del triángulo; las reglas no informativas, o no graduadas, deberán ser usadas para realizar los trazos rectos que permiten completar el triángulo. Es claro que en esta actividad, a diferencia de la anterior, el orden en el uso de los instrumentos sí es importante: si se realizan en primer lugar los trazos con las reglas no informativas, no se llegará a una reproducción aceptable del triángulo; si se usa primero la plantilla, las reglas deberán ser usadas para hacer prolongaciones de los lados incompletos del triángulo, las cuales al intersectarse determinarán el vértice del triángulo. Esta construcción apoyará la visualización de los lados como parte de una recta constitutiva del triángulo.



Todos los estudiantes reciben una hoja con la actividad, idéntica a la de la situación 2 por lo que no se anexa en esta parte una ilustración de la misma. Además reciben los tres instrumentos en cartón.

Situación 1. Actividad 4

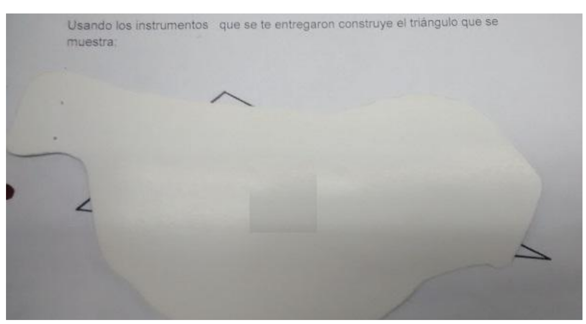
En esta actividad aparecen los mismos elementos que en la situación anterior, pero no se entregan dos reglas no informativas sino una sola. El estudiante debe reproducir el triángulo usando una sola de las reglas y el molde roto del triángulo. Este cambio obliga a que el (tercer) vértice del triángulo aparezca como el cruce de las dos rectas que se dibujan para prolongar los lados que deja el molde roto. Esto es importante en la búsqueda de una visualización alternativa de los vértices y de los lados del triángulo. En las construcciones anteriores el set de instrumentos entregados permitía recubrir todo el contorno del triángulo y luego sí hacer el trazo con el lápiz; ahora dicho recubrimiento ya no es posible. Se espera que esto permita avanzar en una visualización descentrada del contorno de la figura a una en que las partes de dicho contorno resalten.

Los estudiantes reciben una hoja de trabajo, como en las actividades anteriores, y los dos instrumentos en cartón.

<u>Situación 1. Actividad 5</u>

Esta es la última actividad de la situación 1. Se pide de nuevo reproducir un triángulo. Ya no se entrega el molde roto del triángulo, el cual había resuelto un asunto fundamental en la reproducción del triángulo que era la posibilidad de tener dos lados y un ángulo. Ahora se entregan una regla no informativa y una pieza de cartón que no tiene lados rectos; a ésta última se le llamó una superficie cualquiera.

La regla no informativa permite solo el trazo de líneas rectas; la superficie permite hacer marcas para trasladar información, su tamaño permite recubrir parcialmente el triángulo base, esto será fundamental en la construcción. Se espera que los estudiantes al reproducir el triángulo procedan así: con la superficie cualquiera recubrir el triángulo dejando descubiertos los tres ángulos, pues así se puede marcar la ubicación de los cruces de dichos ángulos con la superficie, como se muestra en la imagen siguiente:



Con las marcas sobre esta superficie, trasladarlas sobre la hoja en blanco y con la regla no informativa trazar las rectas que pasan por esas marcas y que determinan los tres vértices.

La apuesta en esta actividad es que todas las reflexiones anteriores les permitan a los estudiantes llegar a las consideraciones necesarias para poder usar la superficie como elemento central en la construcción. En particular, se espera que puedan ver el triángulo formado por las tres rectas.

Los estudiantes reciben una hoja de trabajo igual a la de las actividades anteriores, reciben los dos instrumentos en cartón.

3.2.2 La situación 2.

La situación 2 está compuesta de 5 actividades. Se continúa con tareas de reproducción, se combinan los instrumentos no estándar (la regla no informativa) ya trabajados en la situación 1, con instrumentos convencionales (las escuadras). Se mantienen los mismos instrumentos en todas las actividades y se va cambiando la figura a reproducir. Se pasa así a un trabajo con cuadriláteros, aunque las primeras actividades retoman el triángulo pues en este tipo de figuras se tiene una clasificación interesante a partir de las diversas propiedades que se pueden aplicar en ellos.

Son actividades que de nuevo vinculan los procesos de construcción con los procesos de visualización, es decir, se espera que las posibilidades de construcción de trazos extra que emergen en la actividad abran la posibilidad de avanzar en la segunda forma de visualización señalada anteriormente. En esta segunda forma de visualización, las figuras aparecen como susceptibles de ser transformadas mediante trazos que resaltan propiedades de las mismas y que han de permitir descentrar la mirada sobre el contorno; los instrumentos juegan un papel central en la producción de estos trazos y en la explicitación de estas características.

Al trabajar con polígonos se mantiene el trabajo en el mismo estándar curricular de la situación 1. Se pasa sin embargo a una familia de propiedades más amplia que la permitida por solo triángulos. En particular aparecen las dos diagonales de un cuadrilátero y las posibles relaciones entre ellas, perpendiculares o no y puntos de corte. Las perpendiculares aparecen gracias a las posibilidades de construir un ángulo recto, que garantiza la escuadra, como una forma de trazo reorganizador que puede apoyar diversas estrategias de reproducción de una figura. El asunto central, para resumir, es que en esta situación cada reproducción exige la realización de nuevos trazos sobre la figura lo cual apoya las modificaciones necesarias en la visualización.

Se tiene también para esta situación una conjetura y sus dimensiones, como elemento central de la trayectoria de aprendizaje la cual guió el proceso de diseño y se construyó con base en las reflexiones teóricas que se acaban de presentar.

> Conjetura: El recurso a trazos reorganizadores, usando instrumentos convencionales o no, permite que los estudiantes accedan a nuevas formas de visualización de una figura, la cual resalta características y propiedades de la misma.
>
> Dimensión pedagógica: *Las actividades de reproducción de figuras dan lugar a estrategias de construcción en las cuales aparecen trazos reorganizadores, los cuales han de apoyar el proceso de visualización heurística.*
>
> Dimensión del contenido: *Los cuadriláteros tienen diversas opciones de clasificación en relación con sus propiedades: paralelismo o no de todos sus lados, o un par de ellos, junto a congruencia o no de los mismos.*

<u>Situación 2. Actividad 1</u>

En esta actividad se retoma la figura de la situación anterior; se quería con ello mantener una cierta continuidad en el tipo de tareas, y sobre todo se intentaba proponer un problema diferente basado en una situación ya familiar a los estudiantes. Los dos instrumentos que se entregan no tienen la información necesaria para hacer una reproducción del triángulo al mismo estilo de las anteriores; esto obliga a los estudiantes a buscar una nueva forma de emplear dichos instrumentos. En particular se usó el hecho de que ellos habían trabajado el trazado de rectas perpendiculares, y que reconocen en la escuadra un instrumento en el cual apoyarse para dicha construcción.

Colegio Jefferson
Fundado en 1963

MATEMÁTICAS 6°.
Geometría

Respeto y responsabilidad, la clave para mi crecimiento en Junior.

Profesor: Jorge Galeano

SITUACIÓN 2

ACTIVIDAD 1

Usando los instrumentos que se te entregaron construye el triángulo que se muestra:

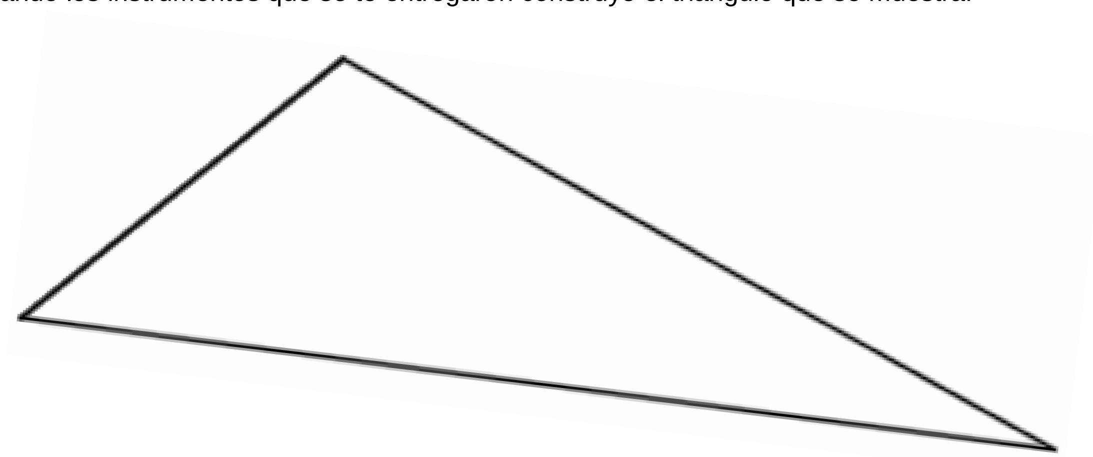


Ilustración 5. Situación 2. Actividad 1

Para la reproducción de este triángulo es necesario que se trace una altura; la que cae sobre el lado más largo del triángulo aparece como la primera opción de los estudiantes. Dicha altura se puede trazar fácilmente con la escuadra; luego, apoyándose en la escuadra y la regla no informativa se puede iniciar la reproducción del triángulo, iniciando con la construcción de un ángulo recto sobre el cual se harán las prolongaciones necesarias para construir, primero, la base y luego los demás lados del triángulo.

Es posible que en esta actividad aparezcan una serie de conflictos en el uso de los instrumentos; puede usarse solo la escuadra y olvidarse de la regla no informativa, pues la hipotenusa o uno de los catetos de la escuadra puede ser usada para cumplir el rol de trazar líneas. El uso combinado de los dos instrumentos intenta apoyar el trazo de la perpendicular y la prolongación simultánea de los lados, pero eso es posible que no sea tenido en cuenta por los estudiantes.

Además, el hecho de haber usado moldes en la situación anterior puede apoyar el uso de las puntas de la escuadra como tales, así los ángulos de la escuadra pueden pensarse como moldes de ciertos ángulos de las figuras. Finalmente, aunque se ha usado la transferencia de medidas con marcas sobre las reglas no informativas, ahora esa transferencia puede hacerse midiendo las longitudes con el lado graduado de la escuadra; aunque esto no representa un impedimento, sí se considera un elemento diferente pues no se hizo en el diseño ninguna consideración sobre las medidas.

<u>Situación 2. Actividad 2</u>

En esta actividad se usó un rombo como el primer cuadrilátero a reproducir. La elección tuvo que ver con la propiedad que caracteriza al rombo: sus diagonales se cortan formando 4 ángulos rectos y son iguales. Se espera que las estrategias de los estudiantes sigan en este sentido, es decir, se espera que tracen las diagonales, como trazos reorganizadores, y que al identificar que estas forman un ángulo recto, propongan una estrategia de reproducción que inicie con este ángulo recto, para luego, con medidas, determinar las diagonales y finalmente construir los lados del rombo.

Colegio Jefferson
Fundado en 1963

MATEMÁTICAS 6°.
Geometría

Respeto y responsabilidad, la clave para mi crecimiento en Junior.

Profesor: Jorge Galeano

SITUACIÓN 2

ACTIVIDAD 2

Usando los instrumentos que se te entregaron construye la figura que se muestra:

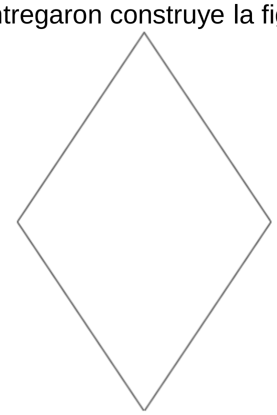
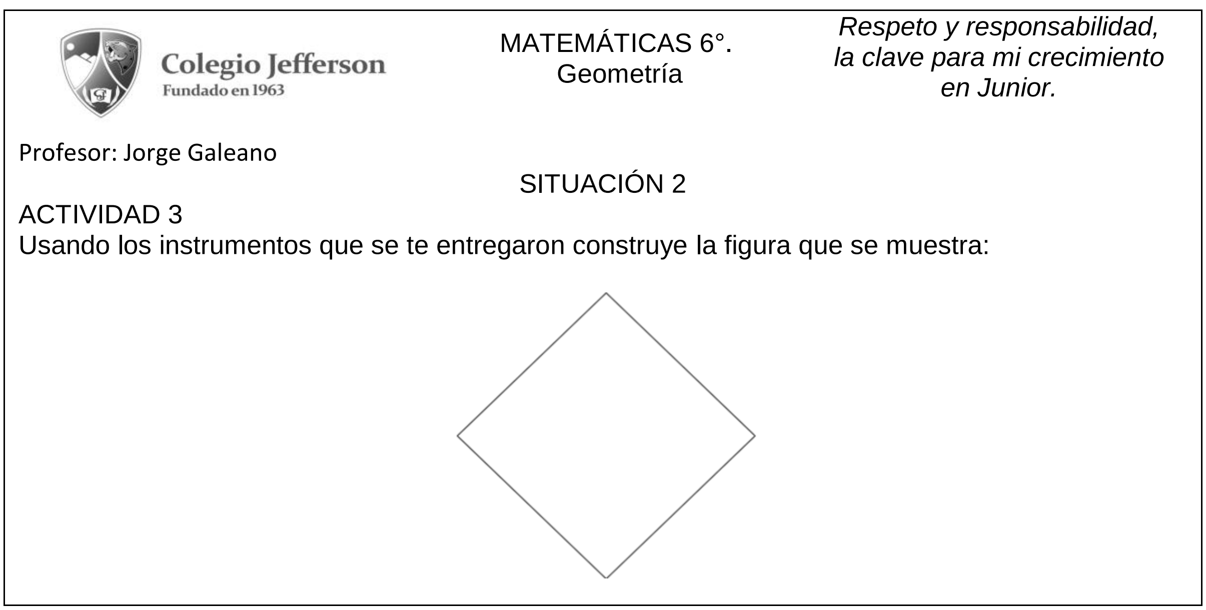


Ilustración 6. Situación 2. Actividad 2

En esta figura, la visualización icónica de la misma puede llevar a los estudiantes a intentar usar uno de los ángulos de la escuadra como molde de alguno de los ángulos del rombo, esa estrategia implica que se use la regla no informativa (y que el ángulo del triángulo a reproducir coincida con el de la escuadra). En esta, y en las actividades siguientes, al mantener la característica sobre la falta de información en los instrumentos para reproducir la figura, se espera que los estudiantes enfrenten la tarea como un verdadero problema, es decir, se espera que aparezcan soluciones en las que se pongan en juego múltiples estrategias que no aparecen en las hipótesis iniciales. A los estudiantes, como en la actividad anterior, se les entregó una hoja de trabajo con la consigna y suficiente espacio en blanco para hacer la reproducción. Usaron su escuadra y se les dio un molde de regla no informativa en cartón.

Situación 2. Actividad 3

En esta actividad la figura que los estudiantes han de reproducir es un cuadrado puesto en una orientación no prototípica. Aunque es probable que las estrategias empleadas para el rombo sean empleadas en esta figura, interesa saber si el contorno cuadrado prevalece sobre las reflexiones ya realizadas en relación con las posibilidades de reproducción, y determinar si aparecen estrategias como la utilización del ángulo de la escuadra como un molde del ángulo recto, ligadas al contorno, o prevalecen los trazos reorganizadores.


Colegio Jefferson
Fundado en 1963

MATEMÁTICAS 6°.
Geometría

Respeto y responsabilidad, la clave para mi crecimiento en Junior.

Profesor: Jorge Galeano

SITUACIÓN 2

ACTIVIDAD 3

Usando los instrumentos que se te entregaron construye la figura que se muestra:

Ilustración 7. Situación 2. Actividad 3.

En esta actividad se espera revisar qué tanto se han alejado los estudiantes de la visualización icónica, pues si esta se mantiene el uso de los moldes (ángulos de la escuadra) aparecerá de manera recurrente. De nuevo se esperan soluciones que no están previstas, pues de nuevo se cree que la actividad tiene las características de un problema.

<u>Situación 2. Actividad 4</u>

En esta actividad la figura que los estudiantes han de reproducir es un trapezoide; esta elección tiene que ver con que guarda una aparente relación con los cuadriláteros anteriores. Esta relación se basa en una aprehensión perceptiva sobre el contorno de las mismas, pero en términos de las propiedades del cuadrilátero han desaparecidos las de paralelismo entre los lados y la congruencia de los mismos; sin embargo se mantienen las relaciones de perpendicularidad entre las diagonales como intento para garantizar así la continuidad en las estrategias que los estudiantes han venido empleando.

Colegio Jefferson
Fundado en 1963

MATEMÁTICAS 6°.
Geometría

Respeto y responsabilidad,
la clave para mi crecimiento
en Junior.

Profesor: Jorge Galeano

SITUACIÓN 2

ACTIVIDAD 4
Usando los instrumentos que se te entregaron construye la figura que se muestra:

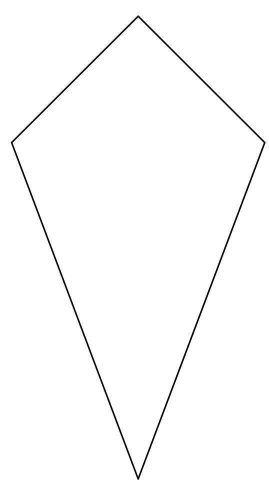


Ilustración 8. Situación 2. Actividad 4.

Se espera que con esta actividad los estudiantes puedan reflexionar en términos de lo que ya no se tiene como una propiedad de esta figura. Es decir, que la identificación de las características de un cuadrilátero aparezca con base en la usencia de las mismas, ya que no tener la propiedad puede ser tan informativo como tenerla.

Situación 2. Actividad 5

En esta actividad se pide reproducir un cuadrilátero no convexo. El que se escogió conserva la propiedad que han tenido los cuadriláteros anteriores, si se tienen en cuenta las diagonales externas. Se asume el reto que la figura impone a los estudiantes pues muchas cosas cambian: la forma de una diagonal que ya se mencionó, ya no hay paralelismo entre los lados, pero sobre todo es una forma poco convencional. Se espera que el trabajo con esta figura permita a los estudiantes alejarse de la visualización icónica y que usen todo lo estudiado para explorar las características de la misma desde una mirada no icónica.

Colegio Jefferson
Fundado en 1963

MATEMÁTICAS 6°.
Geometría

Respeto y responsabilidad, la clave para mi crecimiento en Junior.

Profesor: Jorge Galeano

SITUACIÓN 2

ACTIVIDAD 5

Usando los instrumentos que se te entregaron construye la figura que se muestra:

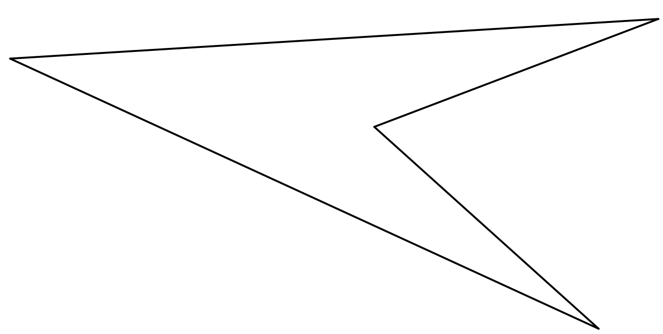


Ilustración 9. Situación 2. Actividad 5

La reproducción puede funcionar de la misma manera que en los cuadriláteros anteriores: a partir de las diagonales perpendiculares de la figura, construir los lados con las medidas tomadas con la escuadra o con la regla no informativa. Sin embargo, si se construye la diagonal interna y no se prolonga, no se producirá el ángulo recto, lo cual afecta la estrategia anterior; es posible que la figura se vea ahora como formada por dos triángulos y se retomen las estrategias de construcción del triángulo de la actividad 1.

3.2.3 La situación 3.

La situación 3 está compuesta de 3 actividades. En relación con las dos situaciones anteriores, las tareas cambian ya que si bien son tareas de reproducción, ésta se hace articulando procesos de visualización y de descripción en lengua natural de las figuras. Es decir, en todas las actividades se parte de una figura que los estudiantes han de reproducir, pero dicha reproducción se debe hacer a partir de la descripción en lengua natural que alguien hace (el que describe y el que dibuja son dos sujetos distintos). Se pasa entonces a la articulación de los procesos de razonamiento y visualización.

Se espera que los avances en la visualización, surgidos de las actividades anteriores, entren en juego para dirigir los procesos de descripción; se asume que hay un desbalance entre estos dos procesos, ya que la visualización ha sido objeto de un trabajo con los estudiantes –aunque inicial-, pero el proceso de razonamiento y sus operaciones de designación y descripción no, por lo tanto estos aparecerán en la forma natural que los estudiantes tengan.

Se mantienen los cuadriláteros de la situación 2. Se varían las formas de presentar los mensajes, los cuales serán en lengua natural. La situación, por su naturaleza, no está propuesta para construir procesos específicos de designación o descripción, sino que pretende identificar qué es lo que caracteriza a dichos procesos en las producciones discursivas de los estudiantes.

Por lo anterior, las dificultades que los estudiantes presenten al momento de abordar las actividades serán indicadores valiosos de las capacidades que estos tienen para articular discurso y figura en sus actividades geométricas.

Para las construcciones se usaron los mismos instrumentos de la situación 2; sin embargo, las relaciones que caracterizan a los cuadriláteros, ahora, además de ser visualizadas deberán aparecer en una narración. Esto pondrá en juego diversos recursos que los estudiantes han de elaborar, pues es claro que dichas propiedades no aparecen en una forma natural del discurso.

Se formula una nueva conjetura para el diseño de las tres actividades, la cual, al igual que en los casos anteriores, pretende recoger las consideraciones que se acaban de señalar. La siguiente es la conjetura y sus dos dimensiones:

> Conjetura: La descripción en lengua natural de los pasos para la construcción de una figura, como una variante de una tarea de reproducción, pone en juego procesos de designación y formulación de proposiciones, las cuales movilizan diferentes operaciones discursivas propias al discurso geométrico.
>
> Dimensión pedagógica: *la articulación entre discurso y figura en geometría, encuentra un escenario potente en las tareas de descripción de una figura con el propósito de ser reproducida por quien lee la descripción.*
>
> Dimensión del contenido: *la clasificación de cuadriláteros es una actividad geométrica que pone en juego propiedades de los objetos geométricos y relaciones como paralelismo y perpendicularidad, así como nociones de congruencia.*

En esta situación se diseñaron diversas hojas de trabajo e instrucciones para los estudiantes; en lo que sigue se presentan los detalles.

<u>Situación 3. Actividad 1</u>

La actividad se realiza con la aplicación “WhatsApp” del celular usando “mensaje de voz”. Se desarrolla en parejas y se determinan dos roles: el narrador y el dibujante. Estos deben estar en lugares distantes (sin contacto visual) y podrán verse en cuanto el dibujante crea haber terminado.

Colegio Jefferson
Fundado en 1963

MATEMÁTICAS 6°.
Geometría

Respeto y responsabilidad, la clave para mi crecimiento en Junior.

Profesor: Jorge Galeano

SITUACIÓN: 3 CONSTRUCCIÓN DE CUADRILÁTEROS

Actividad 1 *El celular*

Objetivo: Debes enviarle únicamente mensajes de voz al dibujante por WhatsApp, para que él pueda hacer un dibujo igual (mismo tamaño y misma forma) a cada una de las figuras que ves abajo.

Reglas:

- No está permitido hacer una descripción global, es decir, no puedes describir “es como una pizza” o “es como una ventana”.
- No se puede decir el nombre de la figura, ni usar una palabra semejante.
- No se puede enviar dibujos, solo palabras en español.
- Todos los mensajes deben ser de voz en WhatsApp.
- Antes de empezar a enviar los mensajes, hazle a la figura lo que consideres necesario como una ayuda para describirla. (por ejemplo, trazar líneas, nombrar las partes de la figura, etc.)

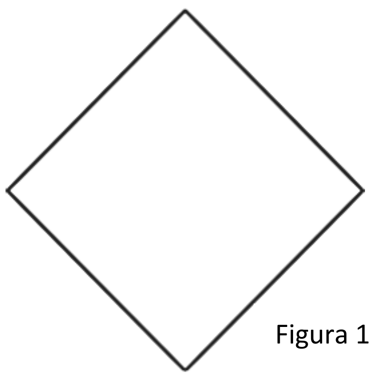


Figura 1

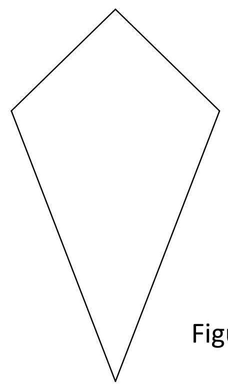


Figura 2

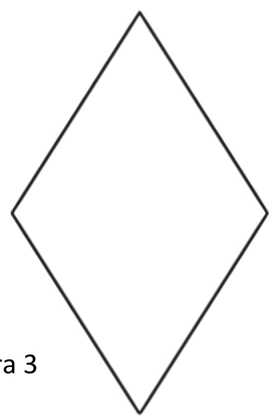


Figura 3

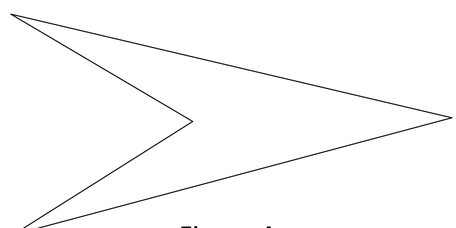


Figura 4

Ilustración 10. Situación 3. Actividad 1.

En esta actividad el estudiante narrador a través de notas de voz, realiza una descripción al dibujante de la figura: tamaño, orientación, magnitud de los lados que la conforman, etc., con el fin de que el dibujante pueda reproducir una figura semejante visualmente. La actividad inicia dándole una figura al narrador, quien deberá elaborar un plan para narrar las características geométricas de dicha figura al dibujante; el dibujante debe ilustrar los mensajes recibidos por el narrador y aproximarse a la representación dada al inicio. No se pueden enviar fotografías ni videos de los dibujos, y no se puede usar el nombre de la figura (no se puede decir “cuadrado” o “rombo”, por ejemplo); esta condición se incluyó en la hoja de trabajo.

Situación 3. Actividad 2

Esta actividad se hace nuevamente en parejas; un estudiante dibuja y el otro describe por escrito. La descripción debe hacerse en una hoja, y esta se envía al dibujante, el cual deberá usar lo que esté ahí escrito para realizar la construcción. Por lo tanto hay tres hojas de trabajo: la que contiene las figuras que se han de reproducir, que solo puede ser vista por quien hace la descripción; la hoja para plasmar la descripción, que se lleva y trae entre la pareja, hasta que la construcción quede lista; finalmente, la hoja del dibujante, en la cual se realiza la figura; esta será también de uso exclusivo de quien dibuja.

Colegio Jefferson
Fundado en 1963

MATEMÁTICAS 6°.
Geometría

Respeto y responsabilidad, la clave para mi crecimiento en Junior.

Profesor: Jorge Galeano

SITUACIÓN 3: CONSTRUCCIÓN DE CUADRILÁTEROS

Actividad 2 *Dibuja el mensaje*

Hoja del Descriptor

Objetivo: Debes enviarle mensajes al dibujante, en la hoja de mensajes, para que él pueda hacer un dibujo igual (mismo tamaño y misma forma) a cada una de las figuras que ves abajo.

Reglas:

- No está permitido hacer una descripción global, es decir, no puedes escribir “es como una pizza” o “es como una ventana”.
- No se puede escribir el nombre de la figura, ni usar una palabra semejante.
- No se puede dibujar, solo frases en español.
- Todos los mensajes deben ser escritos en la hoja de mensajes.
- Antes de empezar a enviar los mensajes, hazle a la figura lo que consideres necesario como una ayuda para describirla. (por ejemplo, trazar líneas, nombrar las partes de la figura, etc.)

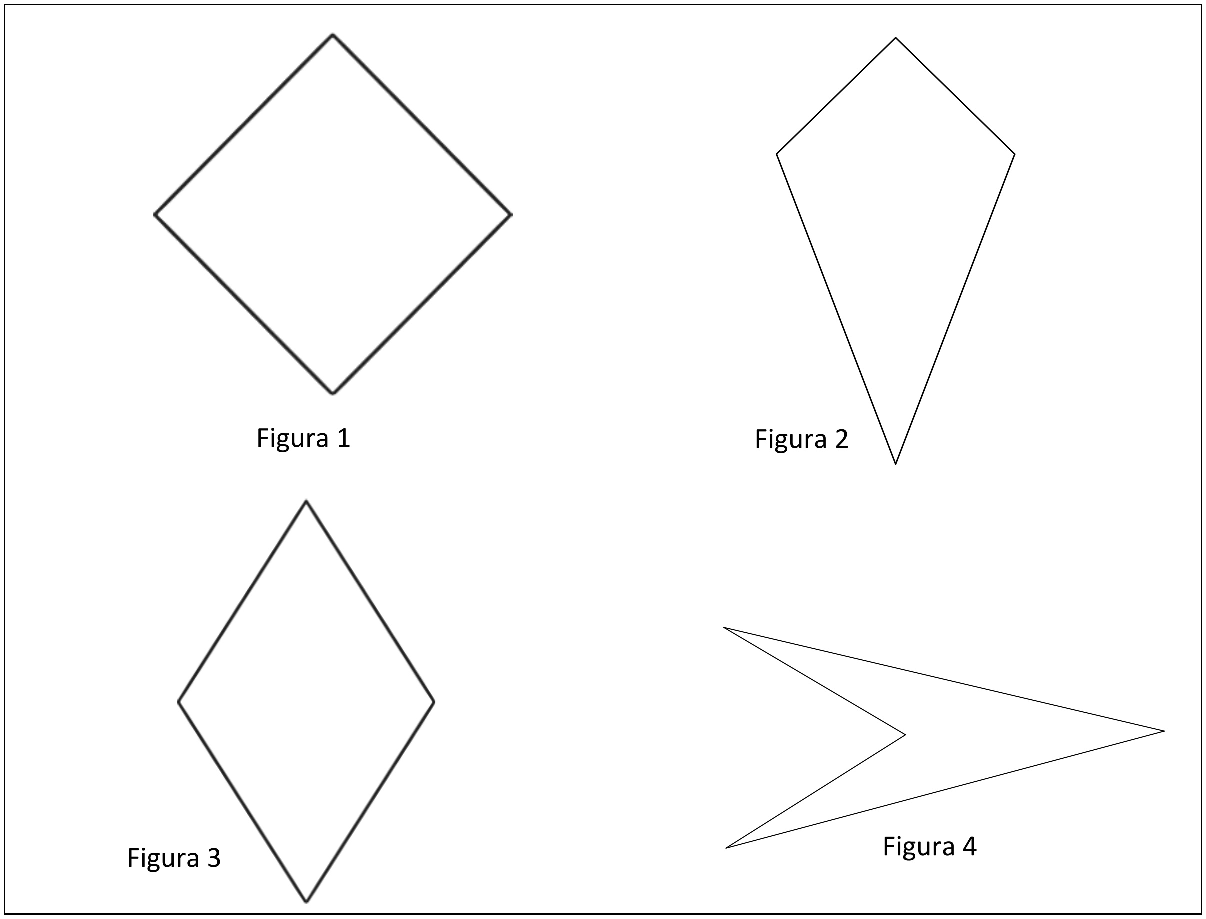


Ilustración 11. Situación 3. Actividad 2. Hoja 1

El escritor debe enviarle mensajes al dibujante en la hoja de mensajes, ilustración siguiente, el dibujante puede preguntar o pedir aclaraciones usando la misma hoja.

Colegio Jefferson
Fundado en 1963

MATEMÁTICAS 6°.
Geometría

Respeto y responsabilidad, la clave para mi crecimiento en Junior.

Profesor: Jorge Galeano

SITUACIÓN 3: CONSTRUCCIÓN DE CUADRILÁTEROS

Actividad 2 *Dibuja el mensaje*

Hoja de Mensajes

Descriptor color ________________
Dibujante color ________________

Ilustración 12. Situación 3. Actividad 2. Hoja 2.

El dibujante cuenta con su propia hoja, ilustración siguiente, la cual no muestra sino al terminar la construcción; se espera que el dibujante construya a partir de lo que lee y que pueda preguntar lo que no le quede claro.

Colegio Jefferson Fundado en 1963	MATEMÁTICAS 6°. Geometría	*Respeto y responsabilidad, la clave para mi crecimiento en Junior.*

Profesor: Jorge Galeano

SITUACIÓN 3: CONSTRUCCIÓN DE CUADRILÁTEROS

Actividad 2 *Dibuja el mensaje*

Hoja del Dibujante

Objetivo: usar las indicaciones que te da tu compañero para construir la figura que te describe.

Reglas:

- Dibuja con un lápiz.
- Procura no borrar los intentos realizados, sino hacer un nuevo dibujo.
- Usa tu escuadra y tu regla.
- Puedes pedir aclaración y preguntar lo que necesites, pero sólo a través de la hoja de mensajes.

Ilustración 13. Situación 3. Actividad 2. Hoja 3.

La organización de la actividad puede ser compleja, pero el conocimiento del grupo alcanzado hasta el momento, gracias a las implementaciones y análisis previos, permitió confiar en su participación y colaboración en la implementación.

Situación 3. Actividad 3

Esta actividad se realiza entre dos grupos pequeños de estudiantes; cada grupo tiene una hoja con dos figuras diferentes, un miembro del grupo contrario vendrá y la mirará, para posteriormente ir a su grupo y hacer la descripción oral de la figura. Con esta descripción uno de sus compañeros hará la reproducción de la figura; si hace falta información o quiere ampliar alguna le puede preguntar a quien trajo el mensaje; este le puede responder pero no intervenir en la reproducción. Después los roles se intercambian entre los grupos, y esto se repite una vez más para así tener la reproducción de las dos figuras entregadas a cada grupo.

Cada grupo de estudiantes tiene una hoja con las dos gráficas que les corresponde, hojas en blanco para hacer la reproducción y los instrumentos que han venido usando.

Colegio Jefferson
Fundado en 1963

MATEMÁTICAS 6°.
Geometría

Respeto y responsabilidad, la clave para mi crecimiento en Junior.

Profesor: Jorge Galeano

SITUACIÓN 3: CONSTRUCCIÓN DE CUADRILÁTEROS

ACTIVIDAD 3 **la última palabra del diccionario (Grupo 1)**

OBJETIVO: Dibujar la Figura que se describe en el menor tiempo posible sin preguntar su nombre o parecido con algún otro objeto (ventana o pizza por ejemplo)

REGLAS:
- Cada grupo debe elegir un descriptor
- Los descriptores no podrán hacer una descripción global de la figura
- El descriptor puede hablar con su grupo interpretador libremente sin decir el nombre de la figura
- el descriptor no puede realizar dibujos
- hágale a la figura lo que considere necesario para describirla.

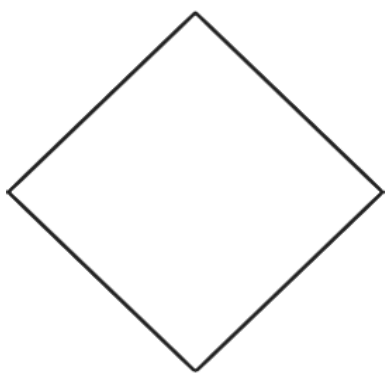


Figura 1

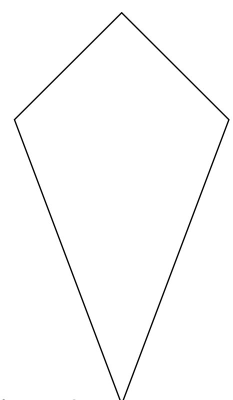


Figura 2

Ilustración 14. Situación 3. Actividad 3.

El otro grupo recibe una hoja de trabajo idéntica, con otras dos figuras distintas. En esta situación las hojas de trabajo contienen una serie de reglas o recomendaciones; estas intentaban cerrar un poco la naturaleza de la tarea, pues al pedirse el uso de la lengua natural podrían aparecer múltiples variaciones en las actuaciones.

3.2.4 Implementación del experimento.

El trabajo guiado por la metodología de los experimentos de enseñanza se realizó en tres fases: diseño, implementación y análisis. La teoría sobre la cual se sitúa el experimento está basada fundamentalmente en la propuesta para el aprendizaje de la geometría que hace Duval (2005), con el propósito de formular una forma de trabajo en clase de geometría basada en criterios cognitivos y no solo matemáticos.

En la primera parte del proyecto se hizo la consolidación teórica del proyecto, la cual incluye la definición de los elementos de la propuesta de Duval que fueron empleados en la formulación de los diseños de las actividades; junto con estos elementos se hizo una revisión curricular que permitió identificar las trayectorias de aprendizaje que se seguirán en el experimento de clase. Con estos elementos se hizo el diseño de la primera situación. Se avanzó en los primeros elementos de análisis de las intervenciones en clase.

Los diseños buscaban fomentar en los estudiantes el desarrollo de sus capacidades de construcción, visualización y razonamiento; en particular, que a partir de la reproducción de figuras usando instrumentos de construcción no estándar lograran reconocer las propiedades que caracterizan a dicha figura. Después, que dicho reconocimiento apoye el proceso de visualización, en lo relacionado con la producción de estrategias heurísticas para transformar dichas figuras y, finalmente, que se inicie la reflexión sobre la relación que existe entre la comprensión del discurso en geometría y los procesos de deconstrucción dimensional.

Para esto se eligió el trabajo con figuras geométricas, pues se considera que sobre ellas descansa la mayor parte de los estudios posteriores que sobre geometría se hacen en el colegio, es decir, se asume que la comprensión de las potencialidades de las figuras para el desarrollo de conceptos y relaciones geométricas es fundamental para la construcción del pensamiento espacial en la educación básica.

Se pasa a la aplicación, análisis y rediseño de las situaciones de clase; la implementación se hace en conjunto con los estudiantes de dos proyectos de pregrado que se han articulado a este proyecto; los análisis hacen parte de las tareas de la línea de investigación en Lenguaje, Razonamiento Y Comunicación De Saberes Matemáticos en su espacio de seminario[3]; las retroalimentaciones que aporta este seminario sirven de insumo para la redefinición de las trayectorias de aprendizaje antes formuladas y para los ajustes consecuentes en las situaciones a implementar.

De la implementación se guardan registros en videos; de las sesiones del seminario se guardan las relatorías y los materiales empleados; todo este ejercicio supone un regreso parcial a las actividades de la fase 1, en el sentido de que fue necesario indagar por nuevos referentes teóricos que permitiesen entender fenómenos nuevos que aparecían en el transcurso del experimento.

Basados en la metodología de los experimentos de enseñanza, la implementación de cada una de las actividades iba dando lugar a ajustes que intervenían en el diseño de las siguientes actividades, de igual forma se procedió al pasar de una situación a otra.

Los resultados de los análisis locales de la implementación de las situaciones 1 y 3 se reportan en el trabajo de pregrado de Bahamón y Bonelo (2015) y la implementación de la situación 2 en el trabajo de pregrado de Hoyos (2015, en evaluación), los cuales fueron dirigidos por el autor de este trabajo de maestría; estos análisis y los datos recolectados se consideran elementos importantes para este trabajo.

Ya finalizadas las sucesivas intervenciones en clase y sus análisis locales, se da inicio al análisis retrospectivo que se contempla en la metodología; esto es, se hace una revisión global de los diseños, la implementación y las discusiones y resultados de los análisis locales con miras a identificar variables que permitan hacer una análisis de las condiciones

[3] El seminario se organizó, durante el tiempo de este trabajo, con participación de estudiantes del pregrado interesados en el tema y los estudiantes de maestría que estaban haciendo trabajo de grado en esta línea (dos trabajos más). Se le dio una estructura temática que permitió abordar los referentes teóricos de los tres trabajos de grado de la maestría (en el primer semestre de 2014) y los fundamentos de la opción metodológica elegida, los Experimentos de Enseñanza (en el segundo semestre de 2014). Antes y después de este trabajo el seminario funciona como el espacio de presentación y discusión de temas actuales relacionados con la línea de investigación.

que produjeron efectos significativos en el diseño y en la implementación. Además se tienen en cuenta algunos de los resultados reportados por Bustamante y Giraldo (2015), en relación a los tipos de tareas que se abordan en los libros de textos escolares, como un insumo para la elección de las nuevas tareas a incluir en las situaciones propuestas.

El análisis retrospectivo de la implementación de las tres situaciones se realizó en el marco de este proyecto; sus resultados sirvieron de base para la formulación de una segunda trayectoria aprendizaje, su conjetura y las situaciones que la configuran; el diseño quedó en la primera fase de elaboración; este sirve de base para determinar algunas características para la formulación de trayectorias de aprendizaje que permitan relacionar los estándares (MEN, 2006) con la propuesta de trabajo para geometría del colegio Jefferson.

CAPÍTULO 4. ANÁLISIS Y RESULTADOS DEL PROYECTO

Iniciado el experimento, con base en la información que se fue recogiendo se iba revisando y reformulando la conjetura con el propósito principal de apoyar la revisión del diseño de las situaciones, atendiendo a la planificación y temporalización de las actividades que en la etapa previa se habían propuesto. Se tomaron decisiones de diferentes tipos que afectaron las intervenciones: los objetivos de la investigación, las formas de recoger los datos y ajustes al diseño de las actividades.

En cuanto a los objetivos, la propuesta inicial contemplaba dos objetivos que hubo de modificarse debido a los resultados que se fueron alcanzando y a las posibilidades que estos dejaban ver para la finalización del proyecto. Por ejemplo, el objetivo relativo a la visualización pasó de estar formulado así "Determinar las variables figurales fundamentales en la construcción de estrategias heurísticas para el trabajo con figuras" a su redacción final "Determinar las condiciones necesarias para el desarrollo de los procesos de visualización requeridos en el trabajo con figuras geométricas para garantizar la articulación entre los procesos discursivos y figurales", pues se vio que la idea detrás de "variable figural" resultaba incompleta para poder describir todo el problema de visualización que se quería abordar.

Se ajusta también el objetivo relacionado con el proceso de construcción; se elimina el objetivo que se tenía en relación con el discurso en geometría, es decir, se encontró que un trabajo que diera cuenta con suficiente detalle de este proceso, y de su trabajo en clase, no podría ser alcanzado en el marco de este proyecto, ya que se estaba haciendo énfasis en los proceso de visualización y de construcción, los cuales ya eran suficientemente amplios.

En las primeras actividades se tenía la atención puesta tanto en el discurso del docente como en las producciones de los estudiantes; los análisis preliminares y la comprensión que se fue ganando de los alcances del trabajo señalaron la necesidad de centrar la mirada en alguno de estos actores. Se decide entonces prestar mayor atención a las producciones de los estudiantes, ya que serían estas las que podrían dar mayor información en relación con las características del diseño. Se asume entonces que un trabajo centrado sobre las actuaciones del profesor puede y debe ser realizado, pero en el marco de otro trabajo.

Las figuras que se emplearon en el diseño de la primera situación, que fueron inicialmente los triángulos, deberían convertirse en objetos geométricos más complejos. De hecho, si se atendían las consideraciones que la teoría exponía, deberían ser configuraciones de figuras; sin embargo, se decidió trabajar con cuadriláteros. Dichos cuadriláteros, aunque no cumplen con la condición de ser configuraciones complejas de figuras -son figuras simples, se consideraron adecuados dada la novedad del tipo de trabajo que se estaba realizando con los estudiantes; además tenían suficientes propiedades para ser abordadas en relación con los procesos de construcción y visualización que se esperaba desarrollar en las actividades.

Lo anterior implica que en la segunda trayectoria de aprendizaje, que se formula a manera de propuesta al final de este capítulo, se aborden figuras que avancen un poco en su complejidad; se decidió mantener como figuras de base a los triángulos y los cuadriláteros, pero ahora con trazos reorganizadores que aportan a su consideración como configuraciones complejas de figuras.

En los trabajos de pregrado señalados se hace una presentación pormenorizada de las actuaciones que en relación con el experimento de enseñanza se dieron en la implementación; en la primera parte de este capítulo se hace una síntesis de los hallazgos más relevantes para este proyecto. Después se hace una descripción del análisis retrospectivo que se realizó y de la propuesta de trayectoria que surge de dicho análisis.

En particular, se muestra cómo un análisis de los datos obtenidos, en relación con los objetivos de este trabajo, permite avanzar en la consolidación de ciertas características que han de tenerse en cuenta para el diseño de situaciones que favorezcan el desarrollo de procesos cognitivos para el aprendizaje de la geometría; dichas consideraciones se ponen en acción en el diseño de tres nuevas situaciones de clase. Además, las recomendaciones que surgen de la implementación del experimento también permiten inferir algunas posibilidades y potencialidades de las trayectorias de aprendizaje como estrategia para organizar el trabajo en clase, de manera tal que se puedan atender las exigencias curriculares colombianas y los desarrollos investigativos que para la enseñanza de la geometría y el desarrollo del pensamiento espacial se presentaron en este proyecto. Al final de este capítulo se hace una descripción de estas recomendaciones y de las formas de vincularlas con la propuesta de trabajo en el colegio.

4.1 Resultados de los análisis locales

En el marco del experimento de enseñanza base de este trabajo se diseñaron tres situaciones, cada una con un grupo de actividades que la componen. Se implementaron en el grado sexto[4] del colegio Jefferson en el marco de los dos trabajos de pregrado de la licenciatura en matemáticas (Bahamón & Bonelo, 2015. Hoyos, 2015) vinculados con el presente trabajo.

La metodología de este proyecto asumió que los análisis locales de dichas implementaciones se llevaran a cabo en el espacio de asesorías de trabajo de grado y en el seminario de la línea de formación en Lenguaje, Razonamiento Y Comunicación De Las Matemáticas; se propuso entonces que el análisis retrospectivo del experimento, que contempla dichos resultados y otro grupo de elementos asociados al trabajo con el experimento, se llevara a cabo en este trabajo de maestría.

Se presenta, en esta primera parte del capítulo, una síntesis de los resultados de los análisis locales, sobre todo aquellos que encuentran relación con los propósitos de este trabajo. Se han organizado en dos grandes grupos: los que tienen que ver con las actividades realizadas en relación con la actividad de construcción y los que tienen que ver con las actividades de razonamiento y visualización.

La presentación que se hace podría hacer pensar en una separación y casi en una secuenciación en el desarrollo de las operaciones. Es necesario aclarar que ese no es el caso. Se verá que en las actividades de construcción aparecen reflexiones ligadas a la

[4] Las actividades del proyecto se desarrollaron en 6°C, con un promedio de 20 estudiantes.

visualización, por ejemplo, y en las de la visualización aparecen reflexiones en relación con la construcción o el razonamiento. Es decir, la separación se hace para efectos del análisis, pero se entiende que estas operaciones aparecen simultáneamente en las actuaciones de los estudiantes, aunque las actividades intentan poner el acento en una u otra de ellas.

4.1.1 Construcción

Las actividades centradas en la construcción se ubicaron fundamentalmente en las primeras dos situaciones. Se logró que el uso de instrumentos no convencionales diera lugar al surgimiento de nuevas formas de visualización sobre las figuras, y que los estudiantes reconocieran propiedades en dichas figuras gracias a los tratamientos (introducción de trazos reorganizadores) que se realizaron sobre estas. Las diversas tipificaciones que se construyeron de estos procedimientos en los análisis locales se reelaborarán para ser usadas en el análisis retrospectivo. Se presenta a continuación una descripción de estas tipificaciones.

Los instrumentos no convencionales y la combinación de ellos en las diferentes actividades, cumplieron el rol esperado; permitieron desarrollar estrategias de construcción (reproducción) de las figuras, haciendo entrar en juego las restricciones que ellos imponían al mismo tiempo que hacían que los estudiantes exploraran usos en los que emergían las propiedades características de las figuras: en los triángulos, por ejemplo, la necesidad de determinar ángulos y lados congruentes entre la figura construida y la figura dada.

Ilustración 15. Construcción del triángulo con molde y plantilla.

Los estudiantes desarrollaron estrategias que les permitían revisar la validez de su procedimiento, al verificar con los instrumentos que tenían a mano las propiedades y características de las figuras que están reproduciendo. Esta validación interna de sus producciones garantiza un control propio sobre las acciones realizadas y de la misma manera genera las estrategias de reorganización y corrección que se deben realizar para llegar a la solución de un problema.

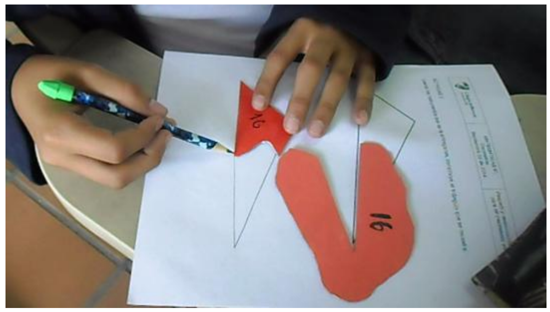


Ilustración 16. Revisión de la reproducción de un triángulo

El uso paulatino de diversas combinaciones de dichos instrumentos fue dando lugar al reconocimiento de las partes de la figura y las propiedades que las caracterizan; sustituir, por ejemplo, la plantilla por dos reglas no informativas, permitió ver el tercer ángulo del triángulo como dependiente de los dos ángulos ya construidos con el molde, y que con la prolongación de los lados de estos se puede obtener ese tercer ángulo. Esta estrategia, que resuelve el problema de reproducción, abre la posibilidad de desligar la mirada de un ángulo como una unidad figural para asociarlo ahora a la mirada de éste como formado por dos rectas que tienen una característica común (su cruce, con una apertura fija).

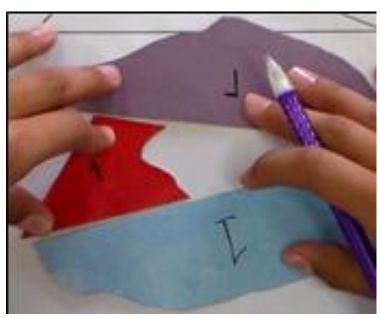


Ilustración 17. Identificación de los lados del triángulo.

Las estrategias de reproducción estuvieron fuertemente ancladas a la producción de ángulos rectos como trazos que permitían encontrar estrategias de reproducción; esta conducta está ligada a que uno de los instrumentos convencionales que se empleó en las actividades es la escuadra, la cual tiene como primitiva fundamental al ángulo recto; esto refuerza la hipótesis de que las posibilidades de identificación de propiedades de las figuras están ligadas a los instrumentos que la actividad moviliza.

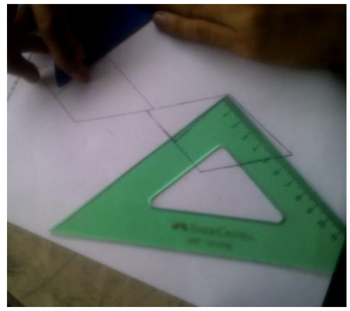


Ilustración 18. Ángulos rectos como figura de base para las reproducciones

Las posibilidades de construcción que permiten las diferentes combinaciones de instrumentos no convencionales dan lugar a los nuevos elementos para la deconstrucción dimensional, ya que los contornos empiezan a romperse y así surgen miradas que reconocen las rectas que determinan dichos contornos. La actividad de construcción apoya a la visualización; se observa en las actividades realizadas que la mayoría de los estudiantes tienen progreso en la forma de ver las figuras, ya que ellos consideran la existencia de elementos de la figura que no están derivados o determinados por el contorno de dicha figura. Es decir pasan la barrera de la percepción 2D que predomina sobre su forma de ver, ya que están considerando elementos que no son contemplados cuando se ve de forma icónica las figuras.

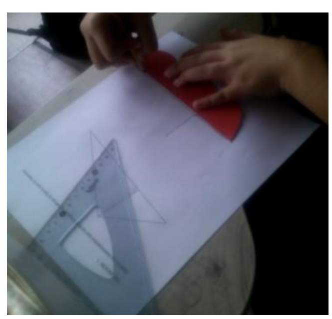


Ilustración 19. Reproducción del triángulo usando una altura.

Los instrumentos empleados dan lugar a la producción de trazos reorganizadores que permiten la aparición de propiedades de las figuras que estaban implícitas; de nuevo, estos trazos permiten la solución del problema de construcción al que se enfrentaban los estudiantes, y al mismo tiempo hacen aparecer formas de actuación de los estudiantes que garantizan el surgimiento de formas de visualización que apoyan la aprehensión operatoria de las figuras. Es decir, estos trazos hacen aparecer divisiones de las figuras en otras figuras, que a la larga pueden permitir la reconfiguración; estas subfiguras, podrán ser empleadas en nuevos problemas en los que sea necesario dividir una figura y hacer una reconfiguración.

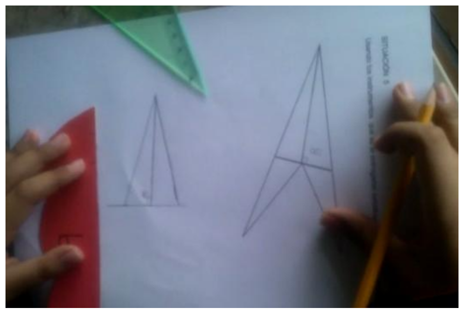


Ilustración 20. Trazos reorganizadores que permiten ver subfiguras.

La reproducción puede ser realizada por traslaciones (asunto que no se contempló en el diseño inicial), iniciativa que surgió en varios estudiantes. Aunque no había control sobre la necesidad de mantener constante tanto la magnitud como la dirección de dicha traslación, los instrumentos no convencionales dados permitían controlar la magnitud pero no la dirección, razón por la cual los intentos llevados a cabo en este sentido presentaban deformaciones debidas a esta carencia.

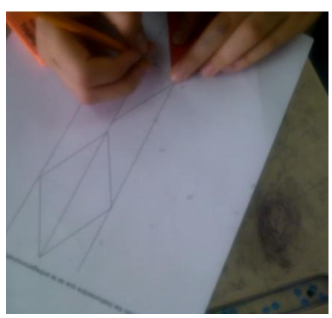


Ilustración 21. Reproducción por traslación.

Sin embargo, es necesario explorar y determinar con mayor precisión las posibilidades y características de cada instrumento. El anterior análisis no puede hacerse separado de las actividades que se proponen, ya que la interacción entre la tarea y el instrumento determinan posibilidades particulares a cada una de estas parejas, las cuales abren una gama de opciones para implementaciones futuras. En la ilustración se presenta el uso no esperado de la escuadra como una plantilla para el ángulo del rombo, debido a una coincidencia no intencional.

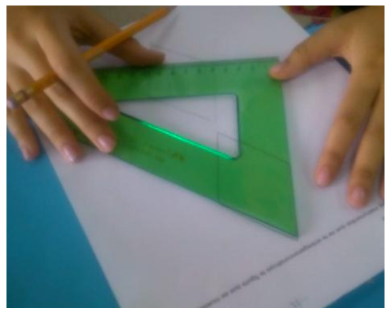


Ilustración 22. Uso de la escuadra como plantilla

El uso de instrumentos convencionales y no convencionales se constituye en una herramienta para el diseño de situaciones de clase, ya que dichos instrumentos permitieron avanzar en el proceso de visualización, toda vez que su empleo apoya la relación que el estudiante construye entre las representaciones gráficas y las propiedades de estas, es decir se constituyen para él en figuras.

4.1.2 Visualización y razonamiento

El análisis de la implementación de las situaciones permite afirmar que los estudiantes alcanzaron a desarrollar formas de ver relevantes, es decir se acercaron a una visualización matemática, en particular avanzaron en la deconstrucción dimensional de formas. Esta visualización les permite efectuar procesos de deconstrucción dimensional en los que se evidencia el paso de ver contornos cerrados a ver trazos independientes. Lo anterior es una forma de visualización no icónica, con la cual pueden utilizar las propiedades de las figuras en la resolución de los problemas propuestos.

Las descripciones que los estudiantes hicieron de sus procedimientos para explicarle al profesor o a un compañero y las que hicieron en la situación 3 para dar las instrucciones que guiaban la construcción realizada por otro compañero, muestran que los estudiantes tienen dificultades para nombrar los objetos y relaciones involucrados en dicha descripción, tal como se señaló en el análisis inicial del diseño. Sin embargo, tales descripciones muestran que los estudiantes pueden organizar un conjunto de proposiciones que dé cuenta de sus acciones, pero en tales explicaciones no aparece la necesidad de dar argumentos o razones para justificar dichas acciones.

Al finalizar los análisis locales es posible afirmar que muchos de los estudiantes ya han logrado superar la aprehensión perceptiva que los restringe a la identificación de los contornos de las figuras, pues es común encontrar en sus procedimientos diversas actuaciones que reflejan el reconocimiento de partes y propiedades de las figuras que aparecen gracias a una visualización descentrada del contorno. En la ilustración siguiente, para el caso del rombo, se muestran diversas configuraciones de formas que están asociadas al rombo, pero que surgen gracias a la introducción de trazos reorganizadores.

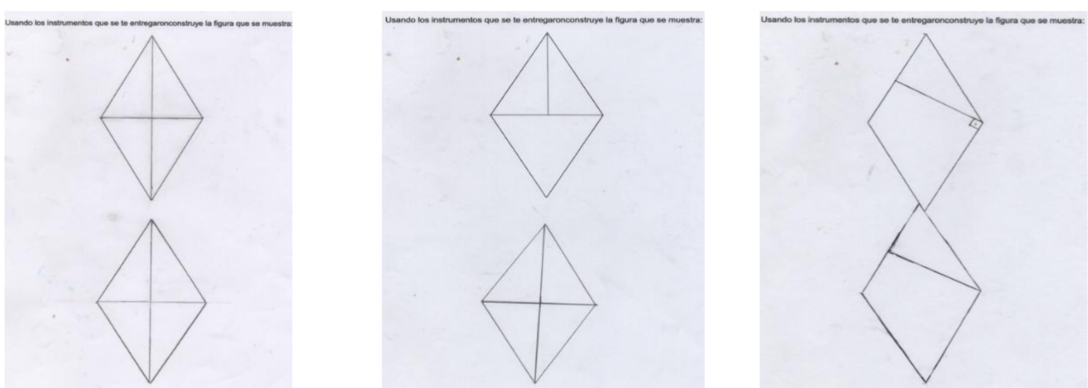


Ilustración 23. Subfiguras posibles en un rombo.

En el mismo sentido del resultado anterior, el de las modificaciones sobre las formas de ver en las figuras, se encuentra en las producciones de los estudiantes la génesis de la deconstrucción dimensional, ya que empiezan a aparecer trazos sobre las figuras que dejan ver las rectas que se pueden asociar a dicha figura y que podrán finalmente dar origen al conjunto de rectas que es posible asociar a una figura dada. La ilustración siguiente deja ver dos de esas producciones. La primera, de forma incipiente muestra cómo una altura del triángulo puede verse como una recta que lo corta cumpliendo ciertas propiedades; este tipo de rectas serán de utilidad en los desarrollos futuros de las redes de rectas. La segunda muestra algunas rectas asociadas al rombo, pero que, como ya se señaló, no tienen garantía de respetar las condiciones necesarias (paralelismo) pues los instrumentos no se estaban usando en ese sentido; sin embargo, esta construcción deja ver trazos como el de la diagonal, que podrían seguir apareciendo en las producciones de los estudiantes, si se acompañan las situaciones de ciertas condiciones.

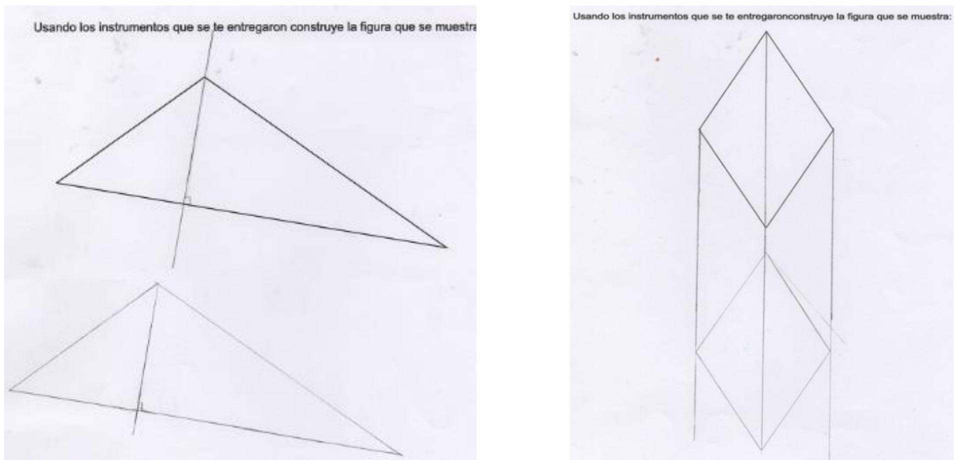


Ilustración 24. Génesis de la deconstrucción dimensional.

Los trabajos previos sobre la construcción de ángulos rectos, permitió entender por ejemplo que aunque estos ángulos son característicos de las rectas perpendiculares no basta con tener uno de ellos para tener dos rectas perpendiculares y que es necesario extender los lados de un ángulo recto para conseguirlo. La comprensión que alcanzan de las propiedades de los instrumentos los lleva a entender la necesidad de esta extensión de los lados y la posibilidad de conseguirlo usando de manera conjunta dos instrumentos. La siguiente ilustración muestra la construcción de un par de rectas perpendiculares apoyada en el uso de la escuadra, para garantizar el ángulo recto, y la regla para prolongar los lados.

Ilustración 25. Trazo de un par de rectas perpendiculares.

Se encuentra que el uso del lenguaje involucra pocos términos especializados, los cuales son reemplazados por términos de uso común que por extensión semántica vienen a cumplir la función de designación de dichos términos especializados del discurso geométrico. A lo anterior se suman las falencias en la construcción de explicaciones y justificaciones para sus procedimientos, los cuales si bien se hacen a partir de conceptualizaciones claras de los conceptos no se articulan de forma adecuada.

El siguiente grupo de ilustraciones (26, 27 y 28) muestra diferentes facetas de lo señalado anteriormente; en la primera de ellas, la 26, se presentan los trazos que hizo el narrador antes de hacer la descripción escrita de la estrategia de construcción que debe entregar a su compañero. Hasta aquí todo funciona de la misma manera que en los análisis previos: se trazan dos segmentos que unen los vértices opuestos del cuadrilátero dado, para con ellos determinar un ángulo recto o un par de segmentos perpendiculares; además el estudiante toma las medidas de los segmentos.

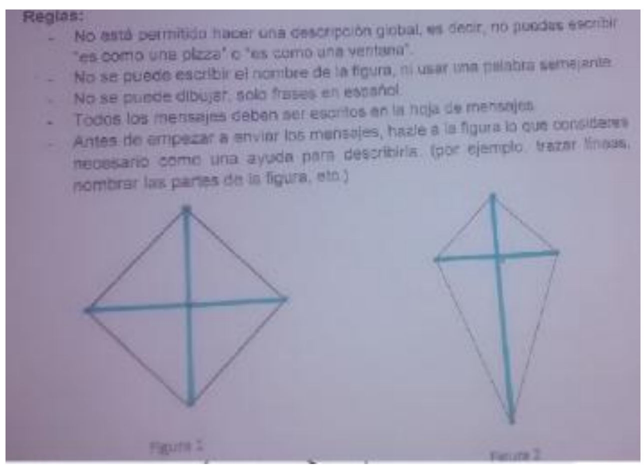


Ilustración 26. Situación 3. Actividad 2, con trazos de un estudiante.

Posteriormente escribe en la hoja de mensajes unas pocas instrucciones. Llama la atención que para señalar el ángulo recto recurre a la expresión “dibuja una línea vertical… y después una línea horizontal en el centímetro 4 de la línea vertical”, se ve claramente que aunque deconstruye el ángulo recto en las líneas que lo componen, recurre a la combinación de la relación horizontal-vertical para nombrarlo, apoyándose en una referencia métrica que marcará el punto de intersección.

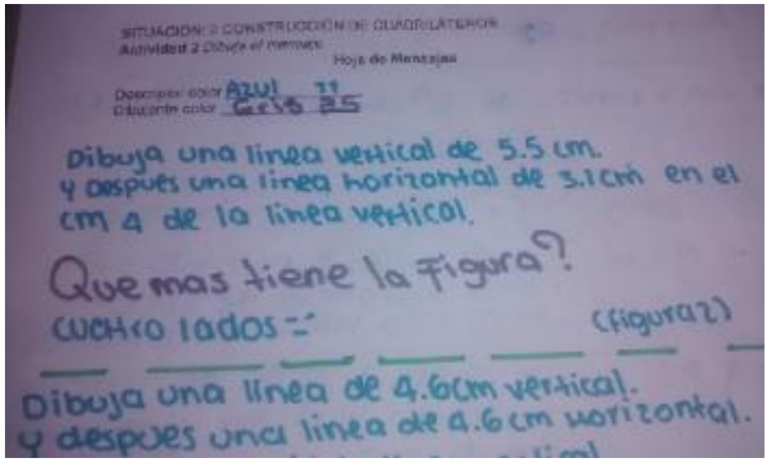


Ilustración 27. Instrucciones de construcción. Situación 3, actividad 2.

Después, su compañero intenta a través de la pregunta "¿qué más tiene la figura?" pedirle la información que él no incluyó en la primera instrucción. En respuesta a esto, el narrador le da nueva información sobre el número de lados de la figura y las medidas de las diagonales. Hay, claramente, cierta información que el narrador no presenta y deja que el dibujante asuma; el hecho de que las diagonales se corten a la mitad de la horizontal y no de la vertical, por ejemplo. Este hecho, el lugar donde ocurre el cruce, al ser asumido por el dibujante da lugar a una reproducción interesante, ya que asumió el lugar del corte vertical al revés y eso dio origen a una representación invertida del cuadrilátero, como se ve en la figura siguiente.

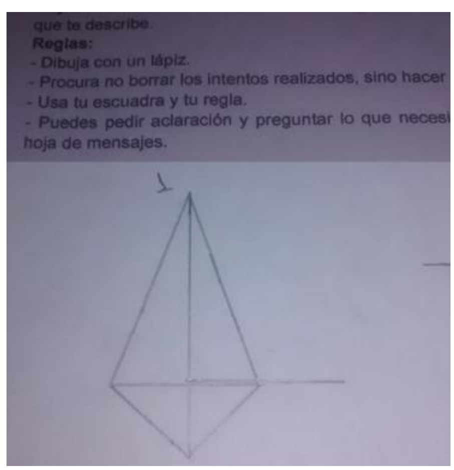


Ilustración 28. Reproducción de la figura 2, situación 3, actividad 2.

La mayoría de los estudiantes logran construir explicaciones de sus procedimientos; esta operación parece funcionar de la misma manera en geometría que por fuera de ella. Sin embargo, ellos recurren a formas diversas de llevar a cabo estas descripciones; los deícticos y las referencias incompletas o mal logradas caracterizan estos procesos.

En la explicación dada por un estudiante del proceso seguido para hacer la reproducción de la figura 3 de la ilustración 27, se tiene el siguiente intercambio (P: profesor; E: estudiante):

> P: ¿cómo lo hiciste?
> E: … Copiar este ángulo, el de acá (el recto que trazó sobre la figura dada), para luego trazarlo acá (señalando el rombo que está construyendo)
> E: Después con esta regla (la no graduada) tomé la medida de este (el segmento que determina la altura) de lo que media esto y lo copie acá (señalando el rombo que está construyendo).
> E: Después hice una línea… bueno, tomé lo que me dio el ángulo de acá y lo copié acá; hice una línea; después tomé la medida que era desde esta línea hasta la esquina y la copie acá… (Ajusta los segmentos perpendiculares)
> E: Después tomé la medida de lo que medía desde esta línea hasta acá y la tracé… Y después tomé la medida de lo que me da este de acá. (Mide los lados de la figura dada y reproduce esas medidas en su reproducción)
> E: y después uní todas estas líneas (los lados que le faltaban del rombo).

Se nota la necesidad de llenar los múltiples vacíos que la narración deja, aunque esto se espera en general de cualquier conversación; sin embargo, es claro que las referencias incompletas y algunas imprecisas son una constante.

Los resultados anteriores vienen a reforzar la hipótesis de que es necesario hacer del lenguaje un asunto de enseñanza en la clase de geometría, es decir, se deben pensar en actividades que permitan a los estudiantes avanzar en la comprensión de las operaciones discursivas propias del discurso en geometría. En particular se puede iniciar con una propuesta de trabajo que tenga en cuenta la designación de los objetos, la descripción de una situación y la explicación de un procedimiento, como algunas formas fundamentales para la construcción de un discurso en geometría.

4.2 Análisis retrospectivo

Finalizadas las sucesivas intervenciones en clase y sus análisis locales, se inició el análisis retrospectivo que se contempla en la metodología; esto es, se hace una revisión global de los diseños, la implementación y las discusiones y resultados de los análisis locales, con miras a identificar variables que permitan hacer un análisis de las condiciones que produjeron efectos significativos en el diseño y en la implementación.

Este análisis además sentará las bases para el diseño de una nueva trayectoria, junto con las actividades de clase respectivas, que se espera sea un prototipo de la propuesta de emplear trayectorias para vincular los estándares con formas de trabajo en clase que vinculen la experiencia y los desarrollo teóricos. Se da una mirada global a las situaciones y a la información recogida; se toman además los referentes curriculares del MEN, la información sobre el conocimiento geométrico que estos referentes desarrollan y las condiciones que los procesos cognitivos involucrados imponen al diseño de las actividades. Con todos estos insumos se construyen rejillas de análisis que permitieron caracterizar los resultados y desprender de ahí la información necesaria para formular la nueva trayectoria y las actividades que le subyacen.

El análisis retrospectivo se inicia teniendo en cuenta los resultados de los análisis locales de los resultados obtenidos en la implementación; se intentaba sobretodo dar elementos para atender el objetivo general: *¿De qué manera las actividades cognitivas de construcción, visualización y razonamiento pueden aplicarse en la formulación de una propuesta para el desarrollo del Pensamiento Espacial al inicio de la educación básica secundaría del colegio Jefferson?*, asunto que se desglosaba en los objetivos específicos.

La primera mirada sobre los datos se hizo atendiendo a: los usos dados a los instrumentos, las propiedades de las figuras que se pueden identificar gracias a dicho uso, la relación de estas propiedades y los tipos de instrumentos empleados, el uso de trazos reorganizadores y las posibilidades de avanzar de una visualización icónica a una no icónica, el papel de estos trazos en el desarrollo de la aprehensión operatoria y la deconstrucción dimensional de formas, y algunas consideraciones sobre las restricciones y cuidados en el uso de dichos instrumentos; todas estos elementos están sustentados en los hallazgos de los análisis locales.

Después la mirada se fue refinando para dar cuenta de las dificultades asociadas a la designación de los objetos geométricos en el discurso de los estudiantes, las posibilidades de descripción que ellos tenían, la ausencia de justificaciones o razones en sus explicaciones, las referencias incompletas al hacer descripciones o explicaciones, y las relaciones de estos elementos con la visualización de propiedades, subfiguras y rectas asociadas a una figura; de nuevo, estos elementos se desprenden de la síntesis realizada de los resultados de los análisis locales.

Esta revisión permitió identificar las siguientes categorías sobre las cuales se ubicaron la mayoría de las producciones de los estudiantes y que al mismo tiempo daban elementos para atender la pregunta del proyecto y los objetivos del mismo. Así, el análisis permitió que:

a. **Se caracterizaran los diferentes usos que los estudiantes dieron a los instrumentos de construcción empleados en las actividades; estos usos se ponen en relación con las características que teóricamente se asignaron a dichos instrumentos.**
b. **Se determinaran las formas de visualización presentes en el trabajo de los estudiantes, sobre todo el proceso de evolución de lo icónico a lo no icónico.**
c. **Se identificaran algunos desarrollos en relación con la deconstrucción dimensional de figuras.**

El uso dado a los instrumentos en general respondió a lo esperado. La plantilla del ángulo sirvió como base de las reproducciones de los triángulos, aunque también sus lados fueron usados para hacer trazos de líneas rectas y como reglas informativas; esto ilustra un asunto conexo al diseño, en el sentido de que aunque la planeación contempla los usos esperados y reflexiones en ese sentido, siempre es posible que aparezcan usos distintos y que sobre la marcha del experimento toque hacer los ajustes o giros a la actividad para que responda a estos usos imprevistos.

Las plantillas apoyan la segmentación del contorno, ya que con ellas se puede iniciar el trazo de la figura pero dejan latentes otros trazos que con ellas no se pueden hacer, lo cual posibilitó el avance hacia la visualización no icónica de figuras. Las características señaladas para las plantillas aplican en general a los moldes, por lo tanto no se hará una presentación para estos.

Las reglas no graduadas se usaron para trazar líneas rectas y, haciendo marcas sobre ellas, sirvieron para hacer transporte de medidas; todo esto en el marco de lo esperado en los experimentos. Este uso de las reglas sirvió como tema de reflexión para entender que en las figuras hay más propiedades que las que determinan los lados, por ejemplo el tamaño de los ángulos. Al inicio los estudiantes intentaban usar solo estas reglas para hacer la reproducción de las figuras, del triángulo por ejemplo; sin embargo, las figuras resultantes no eran válidas pues aunque conservaban las medidas de los lados, que se garantizaban con la regla informativa, no se podían garantizar los ángulos.

Sin embargo este instrumento no apoya directamente a la deconstrucción dimensional, pues aunque se esperaba que los trazos que se realizaran con él dieran lugar a las rectas que contienen a los lados, ocurrió con frecuencia que los trazos terminaban en el vértice o si se excedía un poco los estudiantes los borraban. No fue fácil llevar a los estudiantes a trazar rectas y permitir que estas fueran más allá del vértice; en este sentido se puede decir que en esos momentos prevalecía la forma icónica de visualización.

Los instrumentos convencionales, en particular las escuadras, se convirtieron en una herramienta potente para el trazo de ángulos rectos y con esto determinaron la mayoría de las estrategias de reproducción que surgieron durante las actividades. Usada junto con la regla permitieron el trazo de rectas perpendiculares, tal como se hace en general en clase de geometría pero con la ventaja de que este uso surge como una estrategia natural de los estudiantes, que ya venían de entender que al combinar dos instrumentos se potenciaban las capacidades de construcción que cada uno tenía por separado.

Las formas de visualización que se presentaron en el desarrollo de las actividades ya se han señalado ampliamente; sin embargo se puede hacer un pequeño recuento de las mismas. En las actuaciones iniciales de los estudiantes predominaba la visualización icónica de las figuras; esto se evidenciaba en el predominio de los contornos en relación con la aprehensión perceptiva. Aunque se debe señalar que algunos estudiantes mantienen todavía este tipo de visualización, la mayoría de ellos son ahora capaces de moverse hacia miradas no icónicas de las figuras, al menos en relación con figuras simples y su contorno.

La visualización no icónica se manifiesta sobre todo en el reconocimiento de las subfiguras que surgen al hacer trazos reorganizadores, aunque se debe entender que este reconocimiento no es suficiente para realizar modificaciones mereológicas. Es decir, ya se logró que los estudiantes hagan los tratamientos que les permiten identificar subfiguras pero no se establece completamente la aprehensión operatoria, pues será necesario que los estudiantes organicen reconfiguraciones de dichas figuras, es decir las usen para formar otras figuras de contornos distintos a la figura de base. De este asunto se ocuparán algunas de las situaciones propuestas en la siguiente trayectoria.

Los trazos que predominaron en las actividades fueron el trazo de alturas, las cuales siempre llevaban a dividir el primer contorno en otro que contenía triángulos rectángulos. Aparecen diversas formas de lograr dichos trazos. Otros trazos como unión de vértices para producir diagonales o nuevos segmentos sobre las figuras se encuentran con menos frecuencia. En todos estos casos los trazos nuevos entran a jugar un papel central en el avance desde la visualización icónica a la no icónica.

La otra forma de visualización no icónica, la que apoya la deconstrucción dimensional, se presentó claramente en las acciones de los estudiantes, aunque claro está restringida a ciertas líneas, no a todo el espectro posible de rectas asociables a una figura. Esto debido a que las tareas que se debían resolver solo requerían de algunas de estas rectas. Sin embargo, es claro ahora que los estudiantes ya pueden enfrentar tareas en las que las rectas asociables a una figura, como la prolongación de sus lados o el trazo de paralelas o perpendiculares a los lados, resulten necesarias en relación con las exigencias de las tareas propuestas.

El asunto central en los desempeños de los estudiantes es que logran dar el salto dimensional; pasan de ver las figuras de dos dimensiones como unidades figurales, a ver las unidades de una dimensión que las conforman; es decir, ya es claro para la mayoría de ellos que son los trazos de una dimensión los que permiten la construcción de figuras de dimensión superior. Esto ha de apoyar la relación con el discurso, pues ahora se hará más fácil la relación entre las formas discursivas que nombran las figuras y las formas de visualización que tienen los estudiantes.

Los resultados obtenidos, que se resumen en los elementos anteriores, evidencian las potencialidades de una propuesta de trabajo en clase de geometría basada en el desarrollo de los procesos cognitivos, pues abren una amplia gama de opciones de trabajo con las figuras en geometría; además dejan ver que es posible hacer avanzar a los estudiantes en formas de trabajo que dan cuenta de desarrollos en su conocimiento geométrico al mismo tiempo que construyen formas de actuación y reflexión potentes para la solución de problemas.

Se abre la necesidad de seguir en la relación entre los procesos de visualización y razonamiento, y entre la construcción y razonamiento, pues se ve que los estudiantes presentan serias dificultades para usar un discurso potente en geometría.

Los resultados de este análisis orientan la formulación de una estrategia de trabajo para las clases de geometría que contempla al menos dos elementos: una trayectoria de aprendizaje, o las reflexiones que se pueden hacer en ese sentido y que se pueden aplicar en el caso del colegio. Y la formulación de un nuevo grupo de situaciones que ponga en juego tanto los elementos generales señalados para las trayectorias como las condiciones particulares que para el desarrollo de la visualización, el razonamiento y la construcción arrojó el diseño de las situaciones anteriores.

4.3 Una nueva trayectoria

Se propone ahora un avance en el análisis en el sentido de usar los resultados obtenidos para ilustrar la forma en que se puede seguir el trabajo en geometría en el colegio. Se usan entonces las tres categorías anteriores para iniciar el diseño de una nueva trayectoria. Se formula una tabla en la que se analizan las situaciones ya diseñadas, la cual pone en relación aspectos curriculares y semióticos; esta tabla permite entender el avance logrado hasta el momento en este sentido y asimismo postular un posible recorrido para la nueva trayectoria. Al final, la misma tabla de análisis dará los elementos generales para continuar con el diseño de nuevas trayectorias.

La primera versión que se presenta de la tabla de análisis da cuenta de lo logrado hasta ahora en cuanto a la relación entre currículo y aspectos semióticos con el diseño de la primera trayectoria. Esta misma tabla se actualiza para, en una segunda versión en la que aparecen las tres categorías surgidas del análisis retrospectivo, dar la ruta que habría de seguirse en la nueva trayectoria.

<table>
<tr><td></td><td></td><td colspan="3">ACTIVIDADES COGNITIVAS</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>CONSTRUCCIÓN</td><td>VISUALIZACIÓN</td><td>RAZONAMIENTO</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">SISTEMAS GEOMETRICOS</td><td>OBJETOS</td><td>S2a1
S2a2
S2a3
S2a4
S2a5</td><td>S1a1
S1a4
S1a5
S1a2
S1a3</td><td>S3a1
S3a2
S3a3</td><td>C
B
A</td><td rowspan="3">ESTÁNDARES PENSAMIENTO ESPACIAL</td></tr>
<tr><td>RELACIONES</td><td></td><td></td><td></td><td>J
E
H
I</td></tr>
<tr><td>TRANSFOR MACIONES</td><td></td><td></td><td></td><td>D
K
F</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td colspan="3"></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Tabla 2. Criterios para el diseño de las situaciones 1, 2 y 3

En esta tabla se tiene una organización horizontal, la cual intenta relacionar la propuesta de sistemas geométricos que se presenta en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas, con los Estándares que para el desarrollo del pensamiento espacial, entre los grados sexto y noveno, ha formulado el MEN. Las letras A, B,…, K nombran cada uno de estos estándares[5] (estos se presentaron y analizaron en 2.1.2), y se ve que pueden ser puestos en relación con los objetos, relaciones y transformaciones asociados a dichos sistemas geométricos. En la organización vertical se presentan, de manera general, las actividades cognitivas de Construcción, Visualización y Razonamiento; el cruce de estas dos organizaciones permite ubicar a cada una de las situaciones que se diseñaron para la primera trayectoria.

En la tabla se han ubicado las siglas SxAx (S1a3, significa por ejemplo: situación 1, actividad 1), se busca con ello asociar cada situación en relación con: los elementos del sistema geométrico al cual apunta, con el estándar en el cuál se ubica y con la actividad cognitiva, todo esto asumiendo cierta preponderancia de cada uno de los elementos en relación con los otros, ya que una actividad se relaciona con dos estándares o con varios elementos del sistema geométrico.

Las situaciones 1 y 2 centraban la atención en aspectos de construcción, y la situación 3 en aspectos del razonamiento, todas tienen relación con la visualización; eso es lo que se

---

A. [5] Represento objetos tridimensionales desde diferentes posiciones y vistas.
B. Identifico y describo figuras y cuerpos generados por cortes rectos y transversales de objetos tridimensionales.
C. Clasifico polígonos en relación con sus propiedades.
D. Predigo y comparo los resultados de aplicar transformaciones rígidas (traslaciones, rotaciones, reflexiones) y homotecias (ampliaciones y reducciones) sobre figuras bidimensionales en situaciones matemáticas y en el arte.
E. Resuelvo y formulo problemas que involucren relaciones y propiedades de semejanza y congruencia usando representaciones visuales.
F. Resuelvo y formulo problemas usando modelos geométricos.
G. Identifico características de localización de objetos en sistemas de representación cartesiana y geográfica
H. Conjeturo y verifico propiedades de congruencias y semejanzas entre fi guras bidimensionales y entre objetos tridimensionales en la solución de problemas.
I. Reconozco y contrasto propiedades y relaciones geométricas utilizadas en demostración de teoremas básicos (Pitágoras y Tales).
J. Aplico y justifico criterios de congruencias y semejanza entre triángulos en la resolución y formulación de problemas.
K. Uso representaciones geométricas para resolver y formular problemas en las matemáticas y en otras disciplinas.

quiere mostrar en la primera fila (dos celdas que combinan estos procesos). En lo horizontal, ya se había señalado que el estándar a trabajar era el C (ver 2.1.2) y los otros que aparecen, A y B, aunque no se abordan en estas situaciones, se espera que sean abordados en los trabajos de clase que están por fuera de este experimento. En los refinamientos futuros del experimento se puede esperar hacer una discriminación más precisa en esta primera fila, por ejemplo, asociar con más precisión estándares y actividades.

La siguiente tabla se empleó para orientar el diseño de las siguientes situaciones; se conservó la misma organización horizontal, sin embargo se agregaron tres criterios que han de comandar la lectura vertical de la tabla (de abajo hacia arriba):

Criterio A: a partir de la primera categoría que resultó en el análisis retrospectivo, de la construcción se recoge la realización de trazos reorganizadores sobre las figuras, como apoyo al surgimiento de nuevas formas de ver; con dichos trazos se puede ver en una figura algo que antes no se veía. No se trata de agregar propiedades, sino que el nuevo trazo saca a la luz propiedades o características que estaban ocultas. La situación 4 explota este asunto.

<table>
<tr><td></td><td></td><td colspan="3">ACTIVIDADES COGNITIVAS</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>CONSTRUCCIÓN</td><td>VISUALIZACIÓN</td><td>RAZONAMIENTO</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">SISTEMAS GEOMETRICOS</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td rowspan="3">ESTÁNDARES PENSAMIENTO ESPACIAL</td></tr>
<tr><td>RELACIONES</td><td>S4a1
S4a2
S4a3</td><td>S5a1
S5a2
S5a3</td><td>S6a1
S6a2
S6a3</td><td>J
E
H
I</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>A</td><td>B</td><td>C</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td colspan="3">Los criterios</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Tabla 3. Criterios para el diseño de las situaciones 1, 2 y 3

Criterio B: A partir de la segunda categoría que resultó en el análisis retrospectivo, de la visualización se retoman los elementos de la visualización no icónica que permiten pasar de la aprehensión perceptiva a la operatoria, en particular las modificaciones mereológicas; es decir, reconocer subfiguras y usarlas en procesos de reconfiguración.

Criterio C: A partir de la tercera categoría que resultó del análisis retrospectivo, del razonamiento se retoman elementos de la producción del discurso, las operaciones de designar, describir y explicar, como formas fundamentales de apoyar el avance hacia la deconstrucción dimensional de figuras.

Con estos nuevos elementos se puede dar ahora una descripción general de la nueva trayectoria:

Trayectoria 2: Reconocimiento de relaciones entre figuras.

- Actividades. Identificar figuras y subfiguras, establecer relaciones y explicarlas.
- Tareas: De descripción y De construcción.
- Herramientas: Hojas de trabajo, lápiz, papel, reglas y escuadras.
- Formas de interacción en clase: taller, socialización, discusión, escritura.
- Métodos de evaluación: seguimiento al proceso.

De nuevo se consideró central en la formulación de la trayectoria el establecimiento de conjeturas particulares para cada una de las situaciones, estas de nuevo guiarán tanto el diseño como las intervenciones en clase.

La situación 4 se organiza alrededor de un problema sencillo: dividir una figura a la mitad. Se propondrán dos figuras para ser divididas usando diversos trazos reorganizadores.

Conjetura: *La introducción de trazos adicionales a una figura, como un tratamiento propio del registro figural, apoya el proceso de visualización no icónica y la operación de reconfiguración.*

La situación 5 pretende poner en acción la operación de reconfiguración; a partir de problemas que requieren la identificación y manipulación, visual o representacional, de subfiguras para establecer relaciones que resuelven los problemas propuestos.

Conjetura: *La reconfiguración de figuras apoya los procesos, figurales y discursivos, para producir argumentos heurísticos que sustentan la solución a problemas geométricos.*

La situación 6 se formula para apoyar la deconstrucción dimensional de figuras, aspecto central de la visualización matemática, para ello se apoya en las operaciones de designar, describir y explicar propias al discurso en geometría.

Conjetura: *La formulación de conjeturas y los procesos de explicación y justificación subyacentes son una vía para introducir propiedades y relaciones geométricas, que apoyan la deconstrucción dimensional.*

El análisis que se presenta a continuación de cada una de estas situaciones está asociado al diseño y consideraciones iniciales que se hicieron en el micronivel, se espera que la implementación y demás elementos del macronivel se aborden en propuestas futuras de trabajo.

4.3.1 Situación 4. Descripción general

La situación en general recoge la realización de trazos reorganizadores sobre las figuras, como apoyo al surgimiento de nuevas formas de ver; con dichos trazos se puede ver en una figura algo que antes no se veía. Para particularizar esta reflexión se decide resolver problemas que tienen que ver con dividir una figura a la mitad. Se entiende que esto se logra si las dos figuras que resultan tienen el mismo tamaño (área), pudiendo haber situaciones en las que las formas no necesariamente sean las mismas.

El estudio de esta división se potencia introduciendo trazos, los que han de dividir a la figura, y otros que han de permitir el establecimiento de comparaciones que finalmente garanticen las relaciones establecidas.

La situación consta de tres actividades. En la primera se pide dividir un cuadrado y un rectángulo, se varían los trazos usados para hacer la división: horizontales, verticales y diagonales[6]. Se introducen procesos gráficos como respuesta y se pide a los estudiantes hacer explicaciones de los mismos, también se dejan algunos problemas para ser resueltos por los estudiantes.

En la segunda actividad se mantiene la misma consigna anterior y las mismas figuras, pero ahora los trazos usados para la división son transversales[7]. El tipo de tareas a los que se enfrenta a los estudiantes es similar a la anterior.

En la tercera actividad se mantiene la consigna, pero ahora la figura a dividir es un paralelogramo, se usan los tres tipos de trazos que se han presentado en las situaciones anteriores.

Se espera que con el desarrollo de esta situación se puedan atender algunos indicadores relacionados con los siguientes estándares:

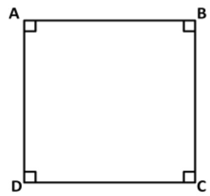
> Aplico y justifico criterios de congruencia y semejanza entre triángulos en la resolución y formulación de problemas.
>
> Resuelvo y formulo problemas que involucren relaciones y propiedades de semejanza y congruencia usando representaciones visuales.

El diseño y la implementación se organizan en relación con la conjetura: Conjetura: *la introducción de trazos adicionales a una figura, como un tratamiento propio del registro figural, apoya el proceso de visualización no icónica y la operación de reconfiguración.* Se espera que las dimensiones pedagógicas y de contenido se expliciten al momento de su implementación, pues se espera que estas se construyan atendiendo particularidades de los grupos de estudiantes con los cuales se han de trabajar.

[6] Trazos que pasan por los vértices de la figura
[7] Trazos, no horizontales ni verticales, que no pasan por los vértices de la figura sino que pasan por puntos que están sobre los lados.

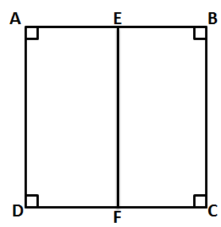
Situación 4. Actividad 1

ABCD es un cuadrado. Vamos a dividirlo a la mitad. ¿Qué caracteriza a las dos mitades de una figura? ¿De cuántas maneras crees que se pueda realizar dicha división?



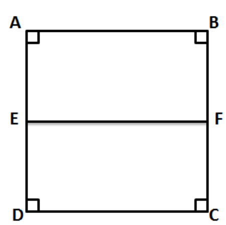
Estudiemos algunas divisiones del cuadrado:

1. Una división mediante el trazo de una línea recta que pasa por puntos ubicados en la mitad de dos lados (los horizontales).

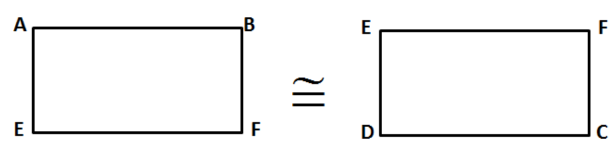


¿Por qué podemos decir que las figuras AEFD y EBCF son dos mitades del cuadrado ABCD?

2. Una división mediante el trazo de línea recta que pasa por puntos ubicados en la mitad de dos lados (los verticales).

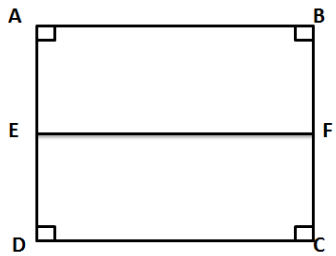


Usamos el signo "≅" para decir que las dos figuras son congruentes. En geometría, para hablar de la igualdad entre dos figuras se usa la palabra "congruente"; entonces decimos que el rectángulo ABFE es congruente con EFCD, y lo simbolizamos ABFE ≅ EFCD.



Estos dos rectángulos son congruentes pues tienen el mismo tamaño y la misma forma.

¿Pasará lo mismo en el caso de un rectángulo? Es decir, ¿La línea EF divide al rectángulo por mitades? explica



____

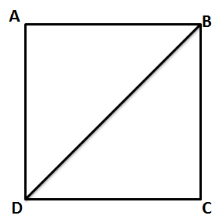
____

____

____

____

3. Una división mediante el trazo de línea recta que pasa por dos vértices opuestos, esta línea se llama en geometría una diagonal del cuadrado

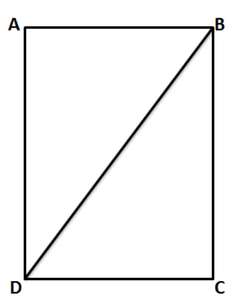


Dibuja los dos triángulos que resultan al dividir el cuadrado con una diagonal. Úsalos para explicar por qué ellos son dos mitades del cuadrado.

____

____

4. Revisemos lo aprendido, ahora tomemos como figura a dividir un rectángulo



¿Los dos triángulos ABD y DBC son mitades del rectángulo ABCD? ¿Por qué?

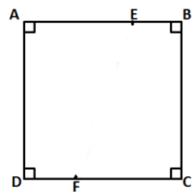
____

____

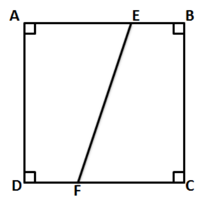
____

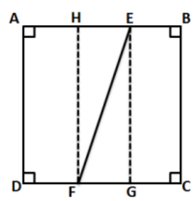
Situación 4. Actividad 2

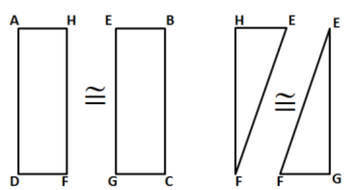
1. ABCD es un cuadrado. Vamos a dividirlo a la mitad. Pero ahora intentaremos realizar trazos distintos a los de la actividad anterior.

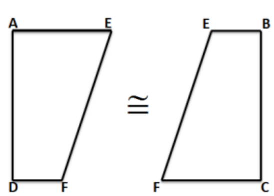


Si trazamos una línea de tal manera que los segmentos EB y DF sean congruentes, el cuadrado queda dividido en dos cuadriláteros. ¿Estos dos cuadriláteros serán mitades del cuadrado? Explica. Usa la siguiente secuencia de figuras para hacer tu explicación.

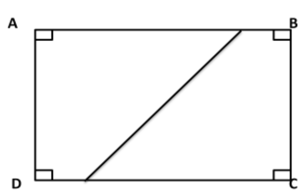






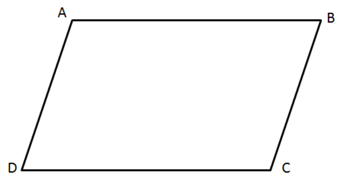


2. Revisemos la aprendido, ahora tomemos como figura a dividir un rectángulo



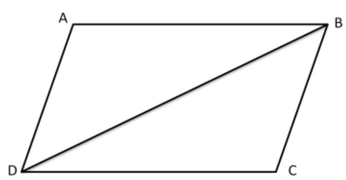
Escribe una explicación, acompañada de una secuencia de figuras, que permita entender si el trazo realizado divide al rectángulo a la mitad.

Situación 4. Actividad 3



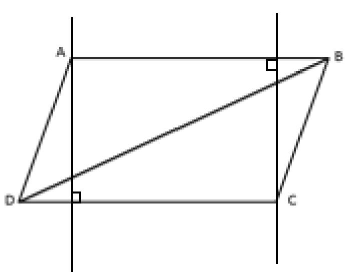
1. ABCD es un paralelogramo. Vamos a dividirlo a la mitad. Realizaremos los cuatro tipos de trazos que hicimos anteriormente.

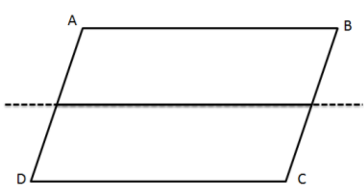
1. Trazando una recta por los puntos D y B, es decir la diagonal del paralelogramo.



¿Los triángulos DAB y DBC son mitades del paralelogramo ABCD?

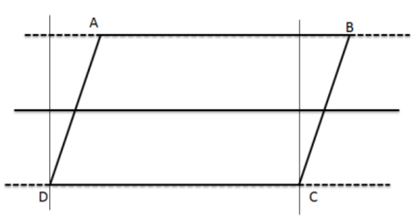
Escribe una explicación de tu respuesta, usa la siguiente figura para apoyarte en la elaboración de la misma.



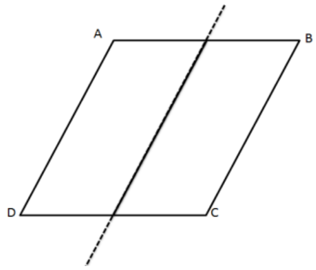


2. Trazando una línea recta horizontal por los puntos medios de los lados.

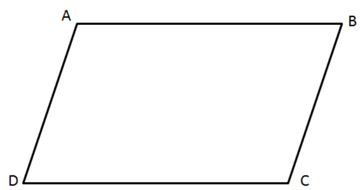
Usa la siguiente figura para construir una explicación que te permita asegurar si las dos partes son o no mitades del paralelogramo.



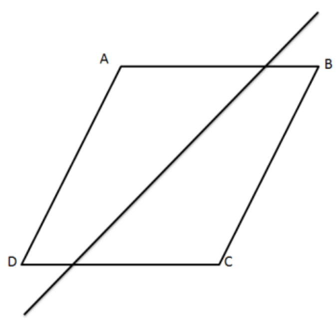
3. Trazando una línea recta por los puntos medios de los lados horizontales.

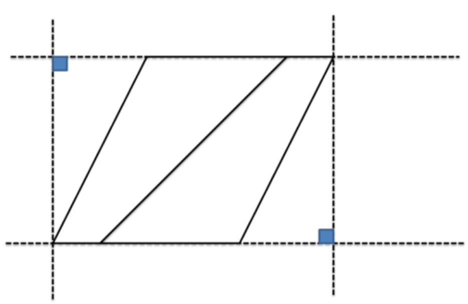


Construye algunos trazos y que te permitan dar una explicación para saber si las partes son o no mitades del paralelogramo.



4. Trazando una línea recta oblicua. ¿qué condiciones se deben poner a los puntos de corte de esta recta con los lados horizontales del paralelogramo? Explica finalmente si el trazo divide o no al paralelogramo en dos mitades.





4.3.2 Situación 5. Descripción general

La situación en general pretende apoyar el desarrollo de modificaciones mereológicas sobre las figuras, es decir, avanzar en la comprensión de la aprehensión operatoria. Todas las actividades propuestas son susceptibles de ser analizadas en términos de las subfiguras que las componen; ya no importa tanto el trazo que lleva a la determinación de estas subfiguras, sino el uso que se haga de ellas para responder a las preguntas.

La situación consta de tres actividades. En la primera se retoman las reflexiones de la situación anterior, en el sentido de establecer la relación "ser mitad…" entre figuras; para ellos se propone un rectángulo y unos trazos que lo dividen en triángulos (aprehensión perceptiva), se les pide a los estudiantes que reconstruyan una secuencia de figuras que exprese dicha relación, para ello deben hacer una explicación.

En la segunda actividad se aborda la relación pitagórica, es decir aquella que hay entre los catetos y la hipotenusa de un triángulo rectángulo; no se espera que los estudiantes la establezcan en su formulación estándar, pero sí que se acerquen a describir la congruencia entre el cuadrado construido sobre la hipotenusa y los dos cuadrados construidos sobre los catetos. La tarea para los estudiantes es similar a la actividad 1 anterior.

La tercera actividad aborda un problema en el que de nuevo hay que establecer relaciones entre subfiguras; se pide da a los estudiantes el inicio de una secuencia de figuras que los pueden llevar a la solución, se les pide que al completen y que, como en las situaciones anteriores, presenten una explicación de esta secuencia y de la relación que con ella se establece.

Se espera que con el desarrollo de esta situación se puedan atender algunos indicadores relacionados con los siguientes estándares:

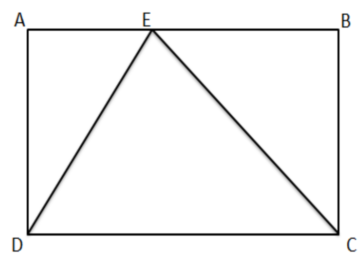
> Reconozco y contrasto propiedades y relaciones geométricas utilizadas en demostración de teoremas básicos (Pitágoras y Tales).

> Aplico y justifico criterios de congruencia y semejanza entre triángulos en la resolución y formulación de problemas.

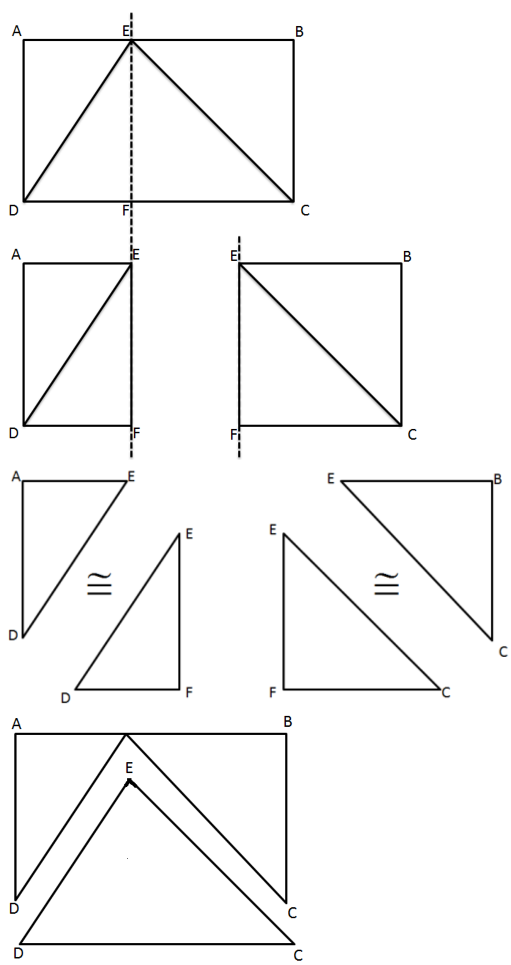
El diseño y la implementación de la situación se organiza alrededor de la conjetura: Conjetura: *la reconfiguración de figuras apoya los procesos discursivos para producir argumentos heurísticos que sustentan la solución a problemas geométricos.* Las dimensiones de esta conjetura y los indicadores de los estándares anteriores habrán de ser precisados al momento de la implementación de esta situación.

Situación 5. Actividad 1

1. ABCD es un rectángulo, sobre un punto cualquiera del lado AB se ubica el punto E. Se trazan así los segmentos DE y EC.



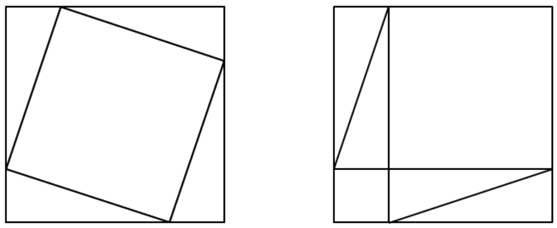
Ahora mostraremos una secuencia de figuras que te llevaran a encontrar un resultado interesante. Después de revisar la secuencia escribe una explicación que sirva para entender dicho resultado.



Explicación:

Situación 5. Actividad 2

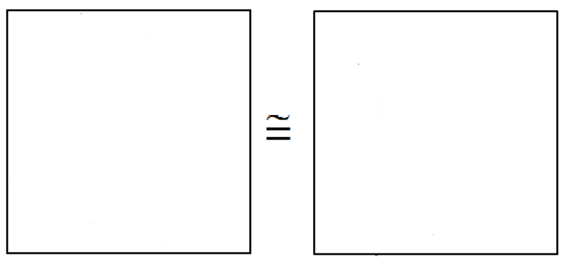
Queremos establecer una relación entre las dos figuras siguientes. Son dos cuadrados, en cada uno de ellos se han trazado segmentos que determinan otras figuras en el interior de los mismos.



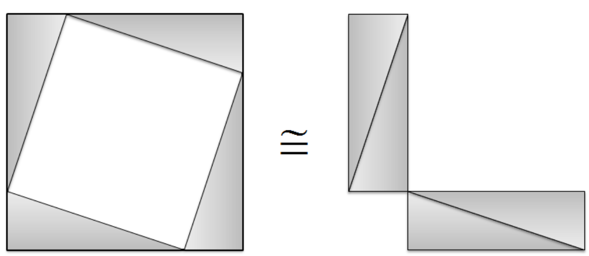
Siguiendo la secuencia que se presenta abajo, descubre y expresa cuál es la relación que se estableció.

Explicación:

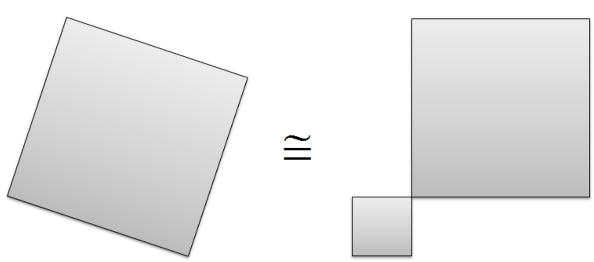
a.



b.

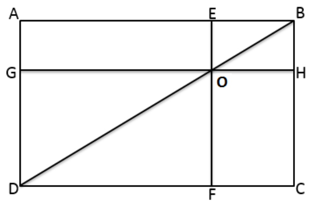


c.



Situación 5. Actividad 3

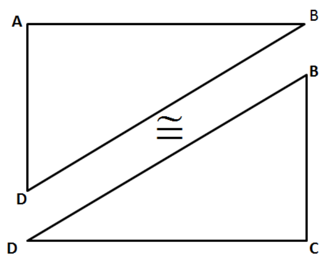
ABCD un rectángulo. Sea O un punto cualquiera de la diagonal BD. GH es la paralela a DC que pasa por O, y EF es la paralela a BC que pasa por O. ¿Qué puedes decir de los rectángulos AGOE y HCFO? ¿Por qué?

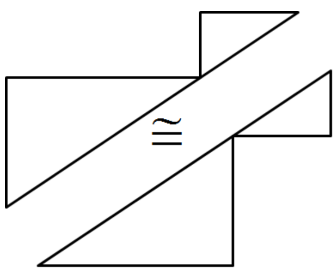


Para responder a esta pregunta se dan los primeros pasos de una secuencia de figuras que permiten encontrar la solución.

Completa la secuencia, falta una figura, y escribe una respuesta a las preguntas.

Explicación, respuestas:





{Dibuja la figura que falta}

4.3.3 Situación 6. Descripción general

La situación en general pretende apoyar el desarrollo de la deconstrucción dimensional; se preocupa por los procesos discursivos de designar, describir y explicar, como formas fundamentales de apoyar el avance hacia la deconstrucción dimensional de figuras. Esto se propone lograr a partir del establecimiento y formulación de conjeturas que surgen como respuesta a los problemas propuestos.

La situación consta de tres actividades. En la primera se retoma el paralelogramo de la situación 1, pero ahora con las dos diagonales trazadas; se espera que puedan surgir conjeturas en relación con: el punto de corte de las diagonales de un paralelogramo y la congruencia de los pares de triángulos que estas determinan.

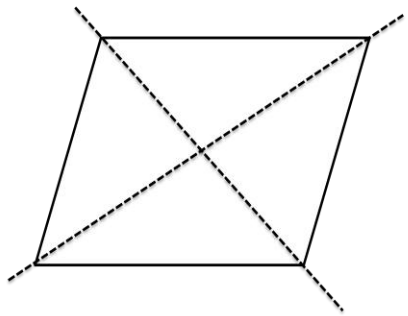
La segunda actividad presenta un problema en el que se ha de establecer la relación entre tres segmentos, se espera que los estudiantes conjeturen una respuesta y que puedan describir el proceso que se necesita para presentarla y defenderla.

En la tercera situación se presenta el resultado "una mediana del triángulo lo divide en dos triángulos de igual área", se espera que los estudiantes logren formular una conjetura en este sentido; en esta actividad hay diversas líneas que apoyan la visualización por deconstrucción de formas, y que al mismo tiempo se espera que guíen dicha formulación.

Se espera que con el desarrollo de esta situación se puedan atender algunos indicadores relacionados con los estándares: Conjeturo y verifico propiedades de congruencia y semejanzas entre figuras bidimensionales y entre objetos tridimensionales en la solución de problemas, y Reconozco y contrasto propiedades y relaciones geométricas utilizadas en demostración de teoremas básicos (Pitágoras y Tales). Y que, como en las anteriores, el diseño y la implementación se basen en la conjetura: *la formulación de conjeturas y los procesos de justificación subyacentes son una vía para introducir propiedades y relaciones geométricas*.

Situación 6. Actividad 1

Sobre un paralelogramo se han trazado las dos diagonales, como se muestra en la figura de abajo.



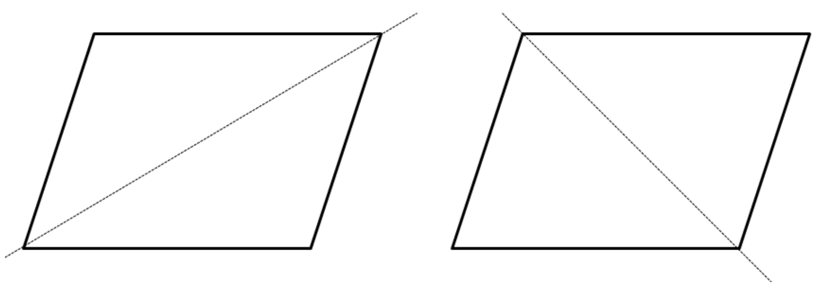
Identifica todos los vértices y el punto de corte de las diagonales, usa letras mayúsculas para todos ellos.

1. ¿Qué figuras puedes ver? Nómbralas

2. ¿Qué relación encuentras entre las dos diagonales y su punto de corte?

3. ¿Qué relación encuentras entre los triángulos que se forman al interior del paralelogramo?

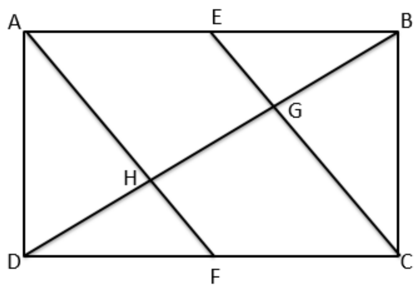
a. Ya sabemos que los triángulos formados por las diagonales son congruentes entre sí.



b. ¿Qué relación habrá entre los cuatro triángulos que se determinan al trazar las dos diagonales en un mismo paralelogramo?

Situación 6. Actividad 2

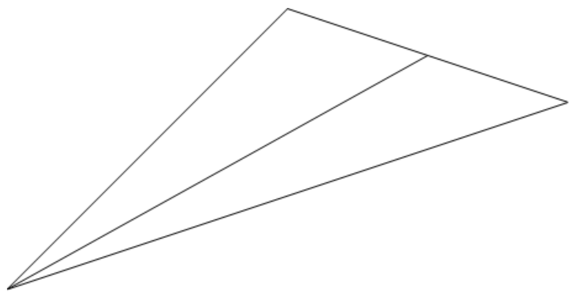
ABCD es un rectángulo, E y F son los puntos medios de AB y DC respectivamente. Se trazan la diagonal DB, y los segmentos EC y AF, los cuales determinan los puntos G y H. ¿Qué relación existe entre DH, HG y GB?



Formula una serie de subfiguras (puedes hacer varios intentos) que te puedan llevar a establecer una posible respuesta y una justificación de la misma. (*puedes guiarte por la estrategia presentada en la situación anterior)*

Situación 6. Actividad 3

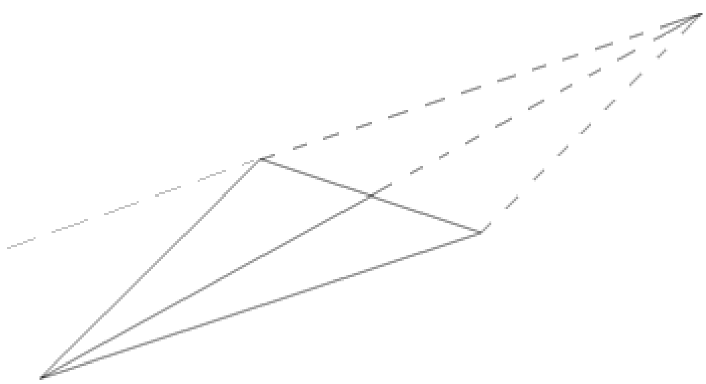
Sobre un triángulo cualquiera se ha trazado un segmento que une uno de sus vértices con el punto medio del lado opuesto, como se muestra en la figura de abajo.

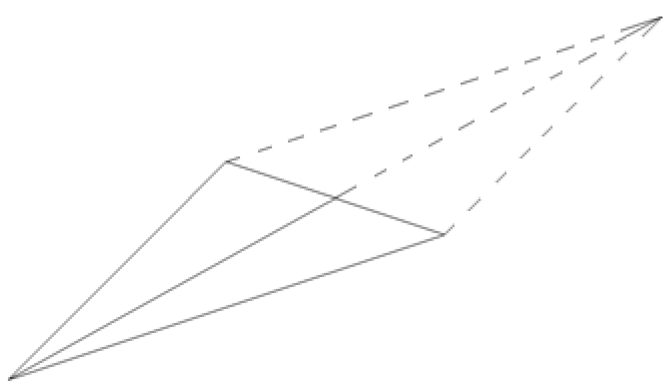


Identifica cada uno de los vértices del triángulo, y el punto medio del segmento.

¿Será que estos dos triángulos tienen alguna relación especial?

Construye rectas paralelas o prolongaciones de los lados sobre la figura anterior (al final se da un ejemplo posible) que te ayuden en la búsqueda de una respuesta.





A partir de esta ilustración, con situaciones de aprendizaje, es posible pasar a determinar y explicitar los criterios generales, basados en las actividades cognitivas, que habría que tener en cuenta para el desarrollo de una propuesta de enseñanza; a partir de estos criterios generales, se pueden establecer criterios particulares que den cuenta de asuntos como la deconstrucción dimensional de figuras, las operaciones discursivas y los instrumentos de construcción, los cuales entrarían a jugar como variables en el diseño de situaciones específicas para atender toda el espectro de los sistemas geométricos.

Hay varios vacíos, hasta el momento, en la propuesta que se desarrolló a partir de la tabla de análisis, por ejemplo, la circunferencia es un objeto que no se ha tenido en cuenta y las transformaciones; el siguiente apartado se darán elementos para atender estos vacíos.

4.3.4 Elementos para nuevas trayectorias de aprendizaje

Las trayectorias de aprendizaje se constituyen como un estudio empírico del aprendizaje de los estudiantes (Confrey & Maloney, 2012), se reconocen en ellas múltiples posibilidades, como las expresadas en el desarrollo de este trabajo en relación con su lugar en la organización del experimento de enseñanza, también se han estudiado sus aportes en relación con lo curricular, al permitir implementar propuestas que vinculan los estándares y algunas trayectorias, por ejemplo. Esta segunda forma de emplear las trayectorias de aprendizaje, por estar en relación directa con el trabajo ya realizado, se propone ahora como una forma de dar recomendaciones en relación con los resultados de este proyecto.

La formulación de trayectorias, de las que se han dado dos ejemplos, puede seguir siendo usada para que los docentes del área de matemáticas del colegio terminen el conjunto completo de trayectorias que son necesarias para todo el plan de estudios. Con ellas se puede dar mayor coherencia y aprovechar la potencia curricular de los estándares; es decir, estas trayectorias se pueden constituir en una forma de darle sentido a formas de trabajo en clase en las cuales las propuestas curriculares logren articular las experiencias de los docentes con la propuesta de formación de pensamiento matemático que se hace desde el MEN.

Además, esta formulación abre múltiples escenarios, tanto de implementación de prácticas docentes reconocidas como potentes, así como de aplicación de resultados de investigación, en los cuales la relación de los estándares con la investigación ofrezca formas de abordar la relación teoría - práctica.

Para ilustrar lo anterior se puede empezar con una revisión de la tabla que se ha venido presentando; los nuevos criterios verticales pueden surgir de los análisis de la implementación de las situaciones anteriores. La fila que atiende los estándares D, K y F está asociada a las trasformaciones geométricas (que no se habían trabajado). En el cruce se pueden ubicar las posibles situaciones que han de organizar algunos de los indicadores asociados a estos estándares.[8]

<table>
<tr><td></td><td></td><td colspan="3">ACTIVIDADES COGNITIVAS</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>CONSTRUCCIÓN</td><td>VISUALIZACIÓN</td><td>RAZONAMIENTO</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">SISTEMAS GEOMETRICOS</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td rowspan="3">ESTÁNDARES PENSAMIENTO ESPACIAL</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>TRASNFORMA CIONES</td><td>Sxa1
Sxa2
Sxa3</td><td>Sya1
Sya2
Sya3</td><td>Sza1
Sza2
Sza3</td><td>D
K
F</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>A</td><td>B</td><td>C</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td colspan="3">Nuevos criterios</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Tabla 4. Propuesta de organización de una nueva trayectoria.

La introducción de criterios cognitivos deberá guiarse, de nuevo, por la investigación existente; en este sentido se pueden revisar resultados o iniciar proyectos que permitan hacer formulaciones posibles del desempeño de los estudiantes. A esto se le ha de agregar la identificación de las características de los estudiantes y del salón de clase, que se concretan en los conocimientos que los profesores tengan de sus grupos.

[8] Es claro que esta trayectoria, ni ninguna de las anteriores, agotan el conjunto de estándares que se les asocia, ellas solo apoyan una faceta de su desarrollo.

En este sentido, las trayectorias pueden describir el aprendizaje de los estudiantes como un proceso que va señalando los desarrollos de los estudiantes, como un conjunto de posibilidades mas no como un grupo de prerrequisitos.

CONCLUSIONES

El desarrollo del trabajo permitió avanzar en la comprensión de diversos fenómenos asociados con el trabajo en clase de geometría: precisar elementos teóricos que apoyan la formulación de criterios cognitivos para el diseño de situaciones de clase, poner en acción una propuesta metodológica que apoya el vínculo teoría – práctica en el contexto del trabajo en clases de geometría, y en general la revisión de las diversas características que se asocian a este tipo de investigación.

La implementación de la propuesta que para la enseñanza de la geometría ha desarrollado Duval, permitió ampliar la comprensión que se tenía del proceso de construcción. Se pudo explorar el lugar que tienen los instrumentos no convencionales de construcción en la formulación de actividades que exploren diversas actividades cognitivas. Su papel en los resultados de la implementación de las primeras situaciones fue fundamental; al mismo tiempo sentaron las bases para desarrollar tratamientos sobre las figuras que fueron centrales en la propuesta de las últimas situaciones. En el marco de este uso de instrumentos no convencionales, los convencionales como la regla y las escuadras aparecieron de manera potente y con un uso más significativo para los estudiantes.

Se logró establecer una descripción del avance de los estudiantes en sus procesos de visualización; se aprecia el desarrollo de formas de visualización ligadas inicialmente a la aprehensión perceptiva, en la cual predominaba la iconicidad de las figuras, hasta llegar a formas de visualización en las que esta iconicidad se va superando para dar paso al reconocimiento de subfiguras y demás elementos constitutivos de una visualización matemáticamente pertinente.

Se diseñaron dos grupos de situaciones en las que se puso en juego una propuesta para el aprendizaje de la geometría. En esta se determinaron características asociadas a los procesos de construcción, visualización y razonamiento, para luego ser empleadas en el diseño de las actividades que conformaban las situaciones. Aunque el alcance en términos curriculares es modesto, pues son pocos los “temas” que se desarrollan en las actividades, si se puede reconocer que las actividades abarcan un amplio espectro de posibilidades para el trabajo con estas operaciones cognitivas.

El análisis de las producciones de los estudiantes, a partir de una amplia cantidad de video, de materiales con las tareas de los estudiantes, fue un trabajo largo y complejo; finalmente se lograron identificar tres criterios que sirvieron de base tanto para darle sentido a los primeros análisis, como para darle forma a la propuesta que se hizo a partir del segundo grupo de situaciones. Este ejercicio de análisis deja sin embargo una claridad amplia sobre los procesos cognitivos involucrados en la actividad geométrica, las características de las situaciones y las actividades propuestas, y las formas en que los estudiantes se acercaron a estos conocimientos. Este trabajo espera ser una expresión de estos logros.

Los experimentos llevados a cabo pusieron en juego a todo un equipo de trabajo. El análisis de los diseños, la teoría que los sustentaba y los primeros resultados, pudieron ser discutidos con un grupo de profesores y estudiantes que participaban del seminario de la línea de investigación en Lenguaje, Razonamiento y Comunicación de saberes matemáticos del área de Educación Matemática. Su implementación vinculó a los estudiantes del pregrado que tenían sus trabajos de grado asociados y a los estudiantes del colegio Jefferson quienes eran los sujetos en análisis; los resultados parciales de los análisis se presentaron en el marco del Seminario de Integración y Evaluación de la Maestría en Educación, en donde fueron sometidos a revisión y debate por los profesores y estudiantes asistentes; además de las discusiones internas con los miembros de la línea de investigación. En fin, lo que muestra lo anterior es la complejidad de este tipo de ejercicios, la gratitud hacia los aportes recibidos, y asumir la responsabilidad por los errores cometidos.

REFERENCIAS

Alsina, C.; Fortuny, J.; Pérez, R. (1992) ¿Por qué Geometría? Propuestas didácticas para la ESO. Madrid: Editorial Síntesis.

Bahadir, H., Flores, A. *Understanding rigid geometric transformations: Jeff's learning path for translation.* En: Journal of Mathematical Behavior. 28 (41–57).

Bahamón, L., Bonelo, Y. (2015). Los procesos de construcción, visualización y razonamiento en el desarrollo del pensamiento geométrico: un experimento de enseñanza. *Trabajo de grado*. Universidad del Valle. Cali.

Battista, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. *Second handbook of research on mathematics teaching and learning, 2, 843-908.*

Bouleau, N. (2000). Reproduction et géométrie en cycle 1 et 2. *Grand N*, (67), 2000-2001.

Bustamante, C. y Giraldo, W. (2015). Los procesos de construcción, visualización y razonamiento en el desarrollo del pensamiento geométrico: análisis de un texto escolar. *Trabajo de grado*. Universidad del Valle. Cali.

Samper, C., Camargo, L., & Leguizamón, C. (2003). Tareas que promueven el razonamiento en el aula a través de la geometría. *Colección: Cuadernos de Matemática Educativa. ASOCOLME. Cuaderno*, (6), 60.

Clements, D., Swaminathan, S., Zeitler, M., Sarama, J. (1999). Young childrens's concepts of shape. *Journal for Research in Mathematics Education*. Vol. 30, No. 2. (pp. 192–212)

Clements, D., Wilson, D. C., & Sarama, J. (2004). Young children's composition of geometric figures: A learning trajectory. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2) (pp. 163-184).

Cobb, P. (2000). Conducting teaching experiments in collaboration with teachers. *En A. Kel & R. Lesh (Eds.), Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education,* Cap. 12 (pp. 307 - 326). N Jersey: Lawrence Earlbaum.

Confrey, J., & Lachance, A. (2000). Transformative Teaching Experiments through Conjecture-Driven Research Design. *En A. Kel & R. Lesh (Eds.), Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education*, Cap. 10 (pp. 231 – 265)

Confrey, J., Maloney, A. P., Nguyen, K. H., Mojica, G., & Myers, M. (2009). Equipartitioning/splitting as a foundation of rational number reasoning using learning trajectories. *En Tzekaki, M., Kaldrimidou, M. & Sakonidis, H. (Eds.), Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics*.

Confrey, J., Maloney, A. P. (2012). Next generation digital classroom assessment based on learning trajectories in mathematics. *En C. Dede & J. Richards (Eds.), Steps toward a digital teaching platform* (pp. 134–152). New York: Teachers College Press.

Confrey, J., Maloney, A., Corley, A. (2014). Learning trajectories: a framework for connecting standards with curriculum. *En: ZDM Mathematics Education*. 46 (pp. 719–733)

De Villiers, M. (1998). The future of secondary school geometry. *Preuve. Newsletter on the teaching and learning of mathematical proof.* Recuperado de http://www.lettredelapreuve.org/

Duval, R. (1991). *Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la démonstration.* En: Educational Studies in Mathematics. 22 (pp. 233 – 261). Kluwer Academic Publishers.

Duval, R. & Egret, M. A. (1993). Introduction a la démonstration et apprentissage du raisonnement déductif. *Reperes* – IREM, Nº 12.

Duval, R. (2000). Écriture, raisonnement et découverte de la démonstration en mathématiques. *En : Recherches en didactique des mathématiques*. Vol 20, nº 2 (pp. 135 -170).

Duval, R. (2001). La geometría desde un punto de vista cognitivo. *En Boletín de la red en educación matemática*, número 2. Cali. Universidad del Valle.

Duval, R. (2003). Decrire, visualiser raisonner: quels « aprrentissages premiers » de l'activite mathematique? *Annales de didactique et de sciences cognitives*, volume 8 (pp. 13-62).

Duval, R. (2004a). Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores del desarrollo cognitivo. (M. V. Restrepo, Trad.) Cali: Universidad del Valle.

Duval, R. (2004b). Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales (Segunda edición). (M. V. Restrepo, Trad.) Cali: Peter Lang.

Duval, R. (2004c). *Cómo hacer que los alumnos entren en las representaciones geométricas. Cuatro entradas y... una quinta*. En M. d. ciencia, Números, formas y volúmenes en el entorno del niño (pp. 159 - 188). Madrid: secretaría general técnica.

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *En: Annales De Didactique Et Sciences Cognitives*. Volume 10 (pp. 5 – 53).

Duval, R. (2010). Los cambios de mirada sobre las figuras. *TEA Tecné, Episteme y Didaxis.* N° 27 (pp. 108 – 129).

Hoyos, M. (2015). Diseño de situaciones que permitan el desarrollo del Pensamiento Espacial a través de la actividad cognitiva de Construcción para los estudiantes del grado sexto del colegio Jefferson. *Trabajo de grado*. Universidad del Valle. Cali.

ICMI. (1994). Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century. *En: L'enseigment mathématique.* T. 40. (pp. 345-357).

León, O. L. (2012). Cien años de reformas y un problema actual en la enseñanza de la geometría. *Investigaciones en Educación Geométrica, 30-40.*

Marmolejo, G. (2003). Geometría, figuras y visualización. *Tesis Maestría en Educación.* Universidad del Valle. Instituto de Educación y Pedagogía. Área de Educación Matemática.

Marmolejo, G., Vega, M. (2012). La visualización en las figuras geométricas. Importancia y complejidad de su aprendizaje. *Educación Matemática,* vol. 24, núm. 3 (pp. 7-32). Grupo Santillana México.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. (1998). Matemáticas. Lineamientos Curriculares. Editorial Magisterio. Primera edición. Bogotá.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. (2006). Matemáticas. Estándares Básicos de Competencias. MEN. Bogotá.

Molina, M., Castro, E., & Castro, E. (2007). Teaching experiments within design research. *The International Journal of Interdisciplinary Social Sciences.* 2(4) (pp. 435-440).

Molina, M., Castro, E., Molina, J. L., & Castro, E. (2011). *Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza*. En: Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas. *29*(1) (pp. 75-88).

Moriena, S., & Scaglia, S. (2003). Efectos de las representaciones gráficas estereotipadas en la enseñanza de la geometría. *Educación Matemática*, *15*(1), 5-19.

Moriena, S., & Scaglia, S. (2005). Prototipos y estereotipos en geometría. *Educación matemática.* Vol 17. Número 003 (pp. 105- 120)

Salin, M. H. (2004). La enseñanza del Espacio y la Geometría en la enseñanza Elemental. *En M. d. Ciencia, Números, formas y volúmenes en el entorno del niño* (pp. 37 - 80). Madrid: Secretaría General Técnica.

Samper, C. et al. (2001). Razonamiento en geometría. *Revista EMA.* Vol 6, No 2. (pp. 141-158). Bogotá: Universidad de los Andes.

SEDUCA. (2005). Interpretación e Implementación de los Estándares Básicos de Matemáticas. Gobernación de Antioquia. Secretaría de Educación para la Cultura. Dirección de Fomento a la Educación con Calidad. Primera edición. Medellín Colombia.

Sfard, A. (2008). Aprendizaje de las matemáticas escolares desde un enfoque comunicacional. Cali, Universidad del Valle, Colección Libros de Investigación.

Steffe, L. P., & Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. *In R. Lesh & A. E. Kelly (Eds.), Research design in mathematics and science education* (pp. 267- 307). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

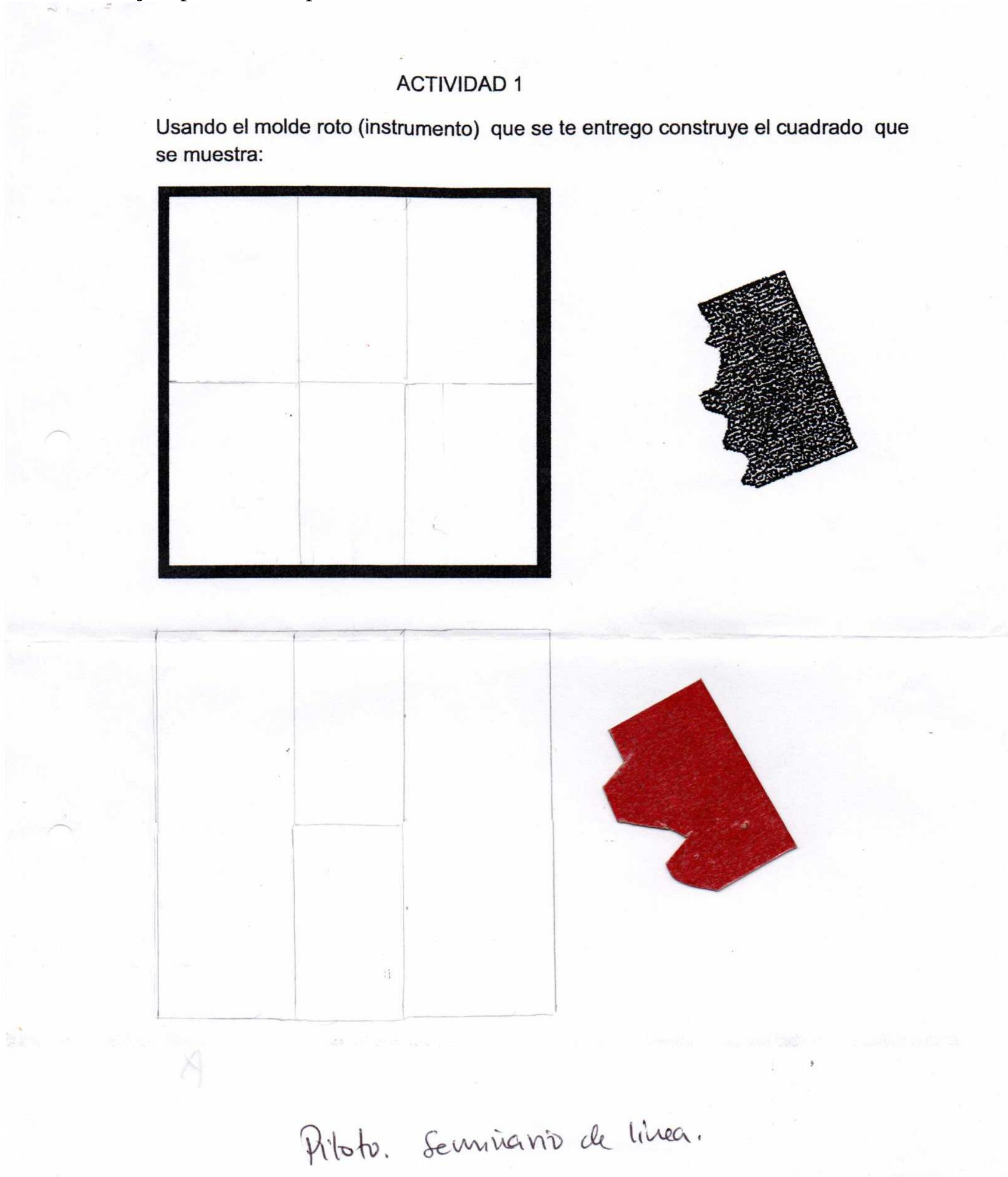
Torregrosa, Germán, & Quesada, Humberto. (2007). Coordination of cognitive processes in geometry. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *10*(2), 275-300. Recuperado en 28 de octubre de 2015, de http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-24362007000200005&lng=es&tlng=en.

Walcott, C., Mohr, D., & Kastberg, S. E. (2009). Making sense of shape: An analysis of children's written responses. *The Journal of Mathematical Behavior,28* (1), 30-40.

Wilson, P. H., Mojica, G. F., & Confrey, J. (2013). Learning trajectories in teacher education: Supporting teachers' understandings of students' mathematical thinking. *The Journal of Mathematical Behavior*, *32*(2), 103-121.

ANEXOS

ANEXO 1. Ejemplos de las producciones de los estudiantes.



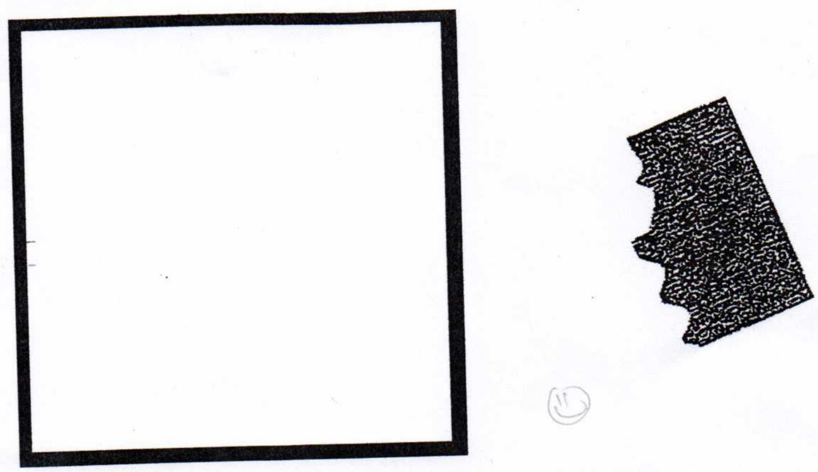
ACTIVIDAD 1

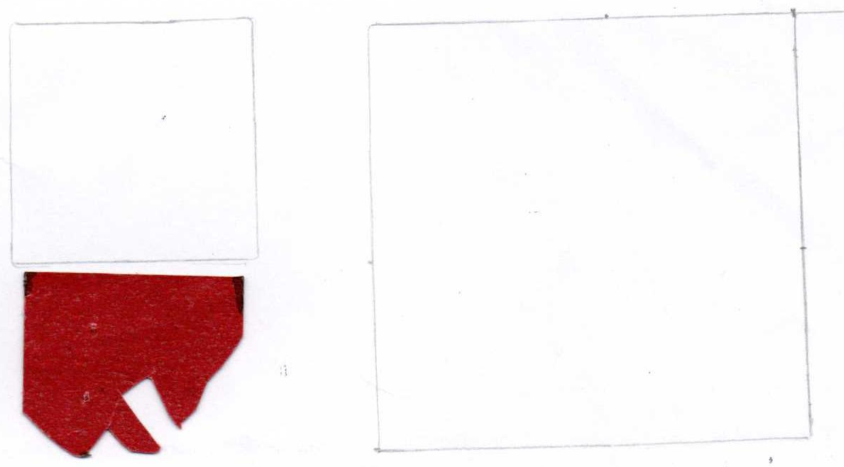
Usando el molde roto (instrumento) que se te entrego construye el cuadrado que se muestra:

Piloto. Seminario de linea.

ACTIVIDAD 1

Usando el molde roto (instrumento) que se te entrego construye el cuadrado que se muestra:





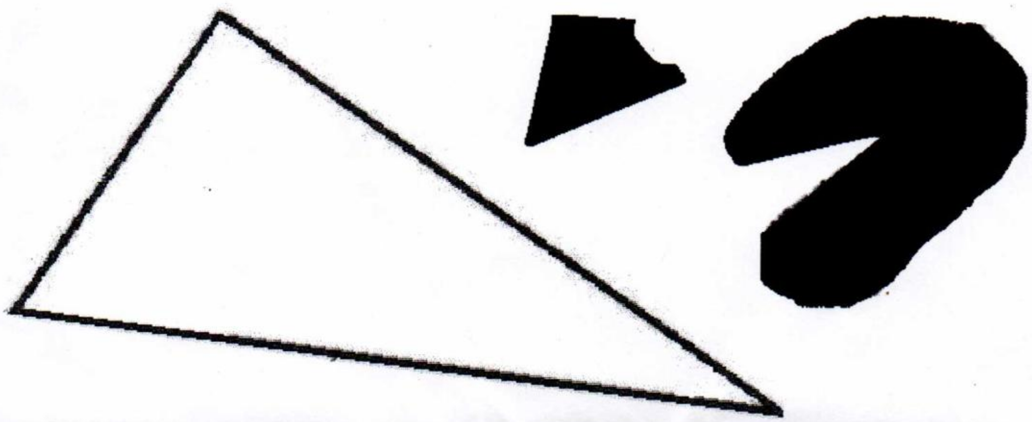
Piloto. Seminario de línea

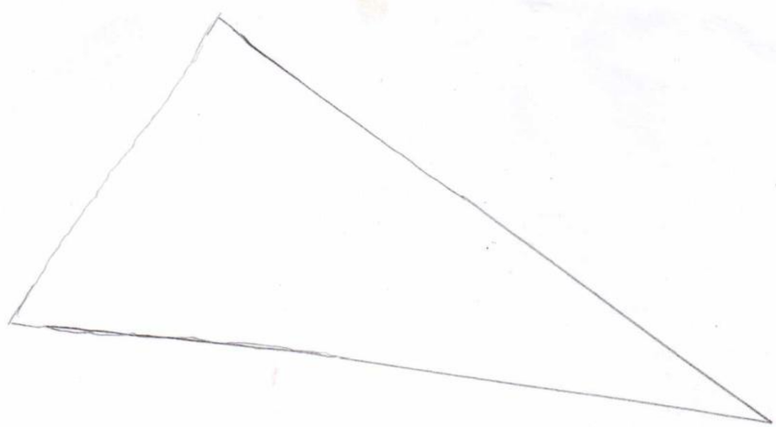

Jennifer
Ferro

Jennifer Ferro

ACTIVIDAD 2

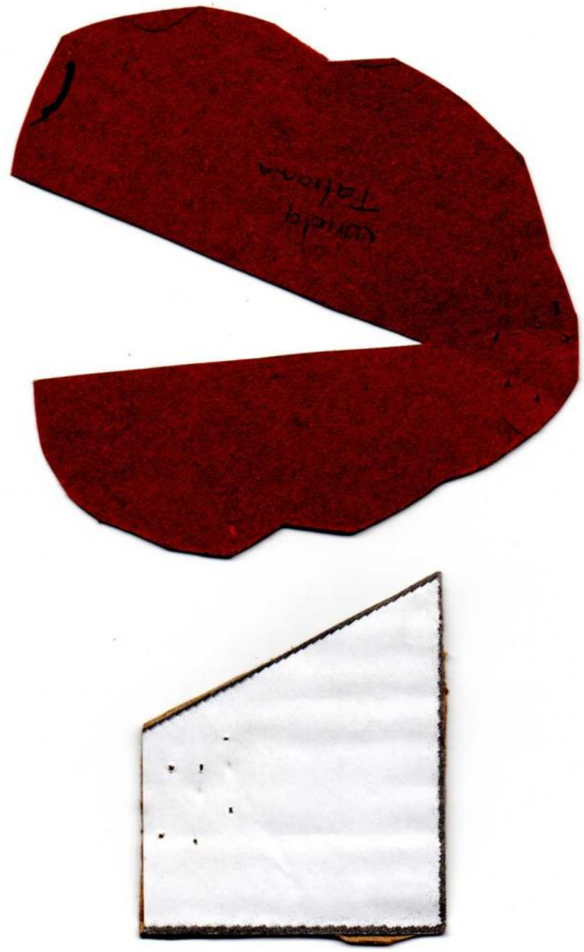
Usando el molde roto y una plantilla rota (instrumentos) que se te entregaron construye el triángulo que se muestra:





C

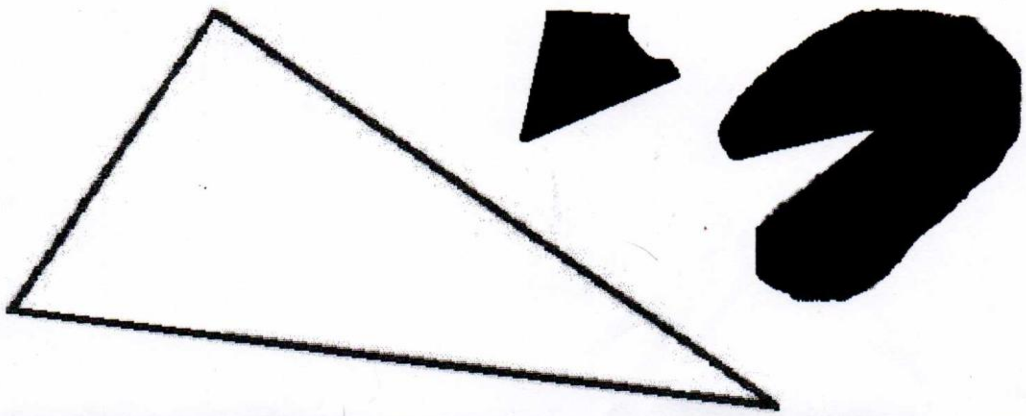
Piloto Seminario de línea



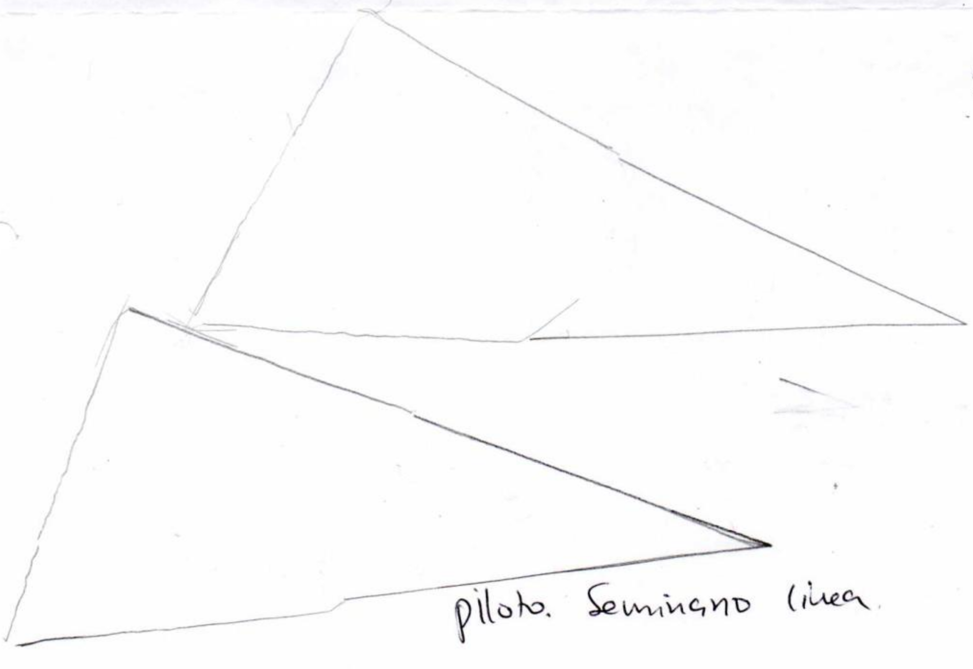
Tatiana Iguarán
Nanda Iguarán

ACTIVIDAD 2

Usando el molde roto y una plantilla rota (instrumentos) que se te entregaron construye el triángulo que se muestra:



D

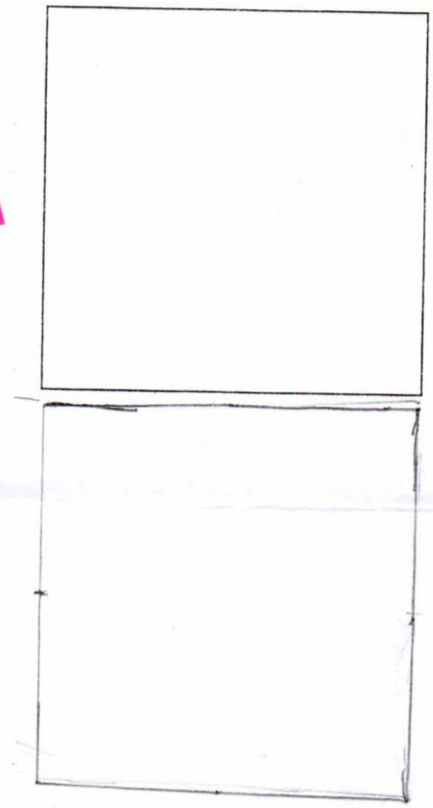


piloto. Seminario línea

ACTIVIDAD 1

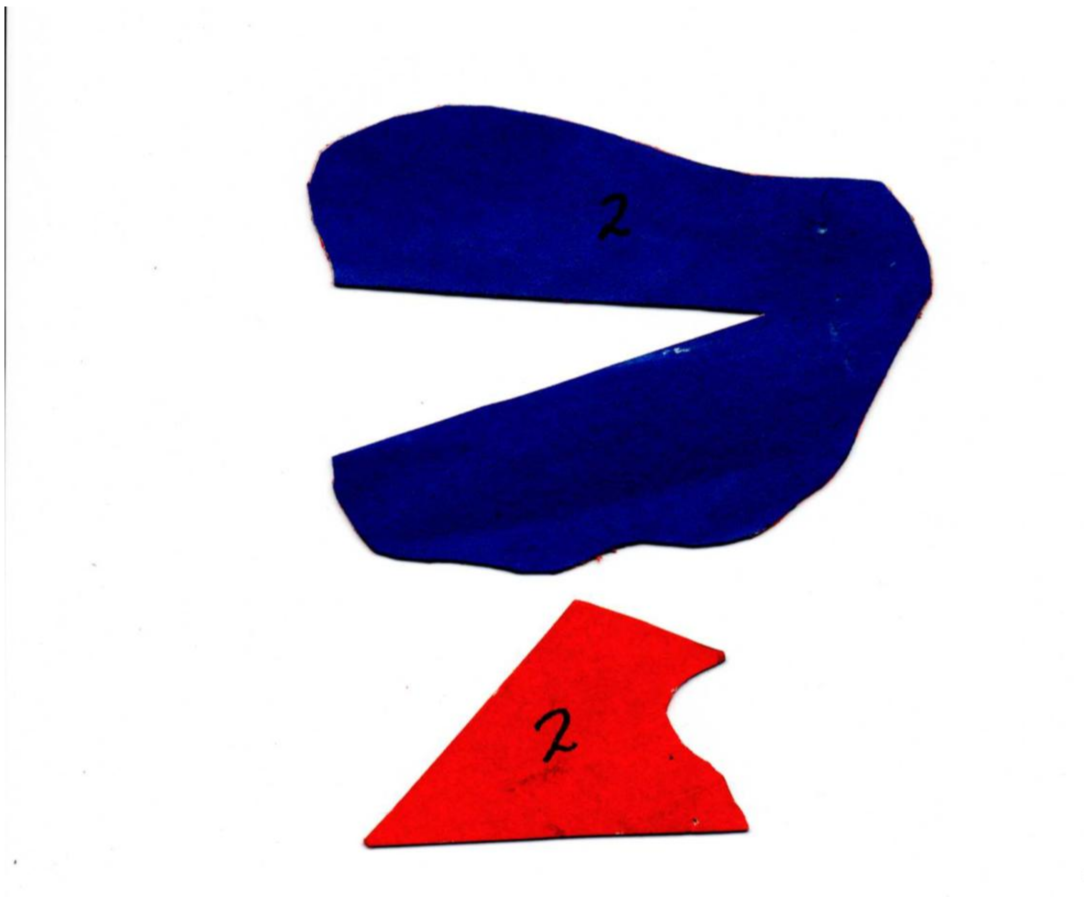
Usando el instrumento que se te entregó construye el cuadrado que se muestra:

7



E

Situación 1. Actividad 1. Ejemplo 1

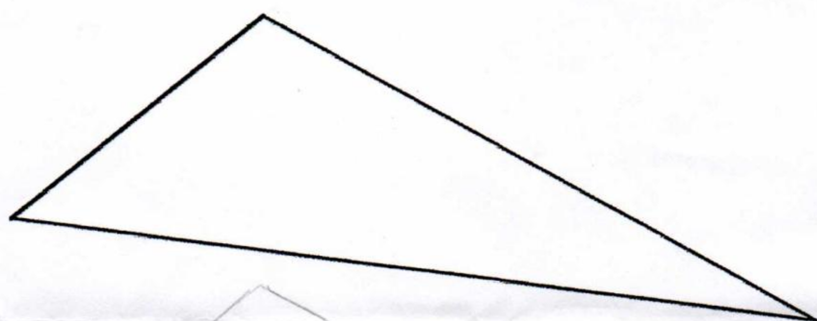

2
2

#2

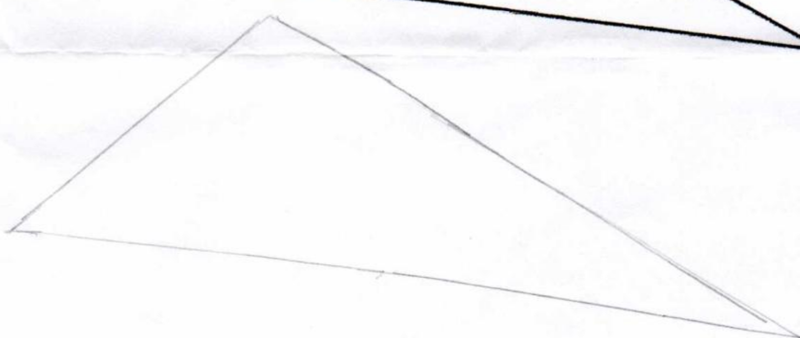
Colegio Jefferson Fundado en 1963	MATEMÁTICAS 6°. Geometría. Septiembre 22 de 2014.	*Respeto y responsabilidad, la clave para mi crecimiento en Junior.*

ACTIVIDAD 2

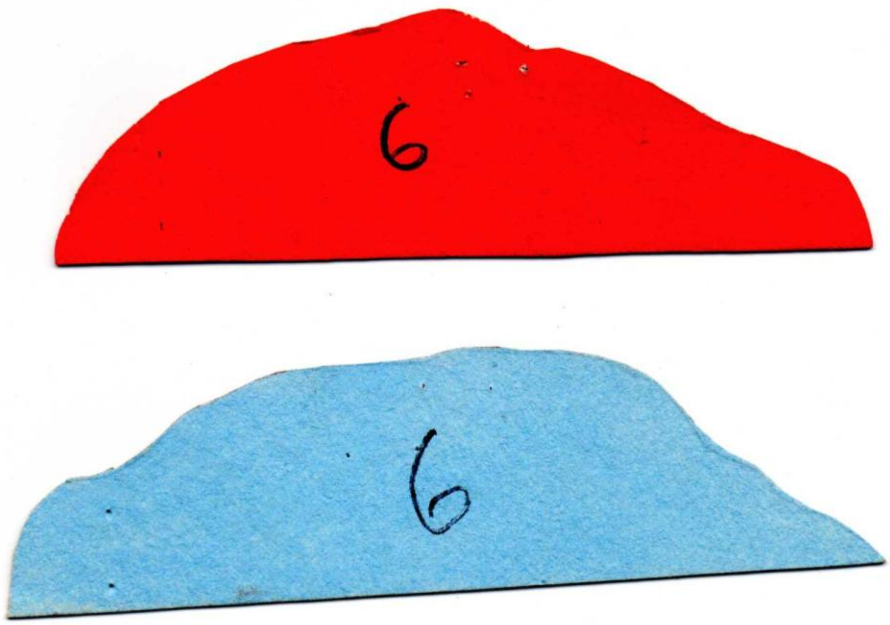
Usando los instrumentos que se te entregaron, construye el triángulo que se muestra:



G



Situación 1. actividad 2. Ejemplo 1

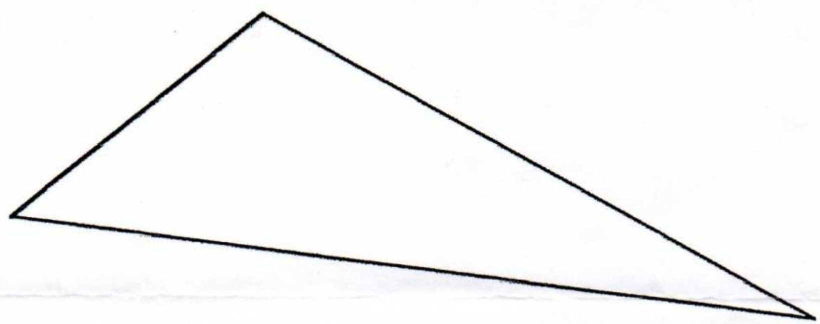

6
6

6

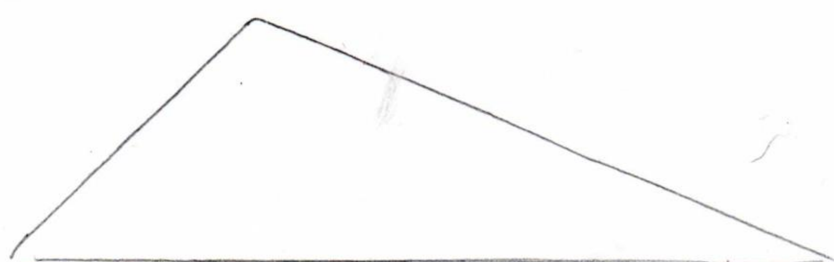
Colegio Jefferson Fundado en 1963	MATEMÁTICAS 6°. Geometría. Septiembre 22 de 2014.	*Respeto y responsabilidad, la clave para mi crecimiento en Junior.*

ACTIVIDAD 3

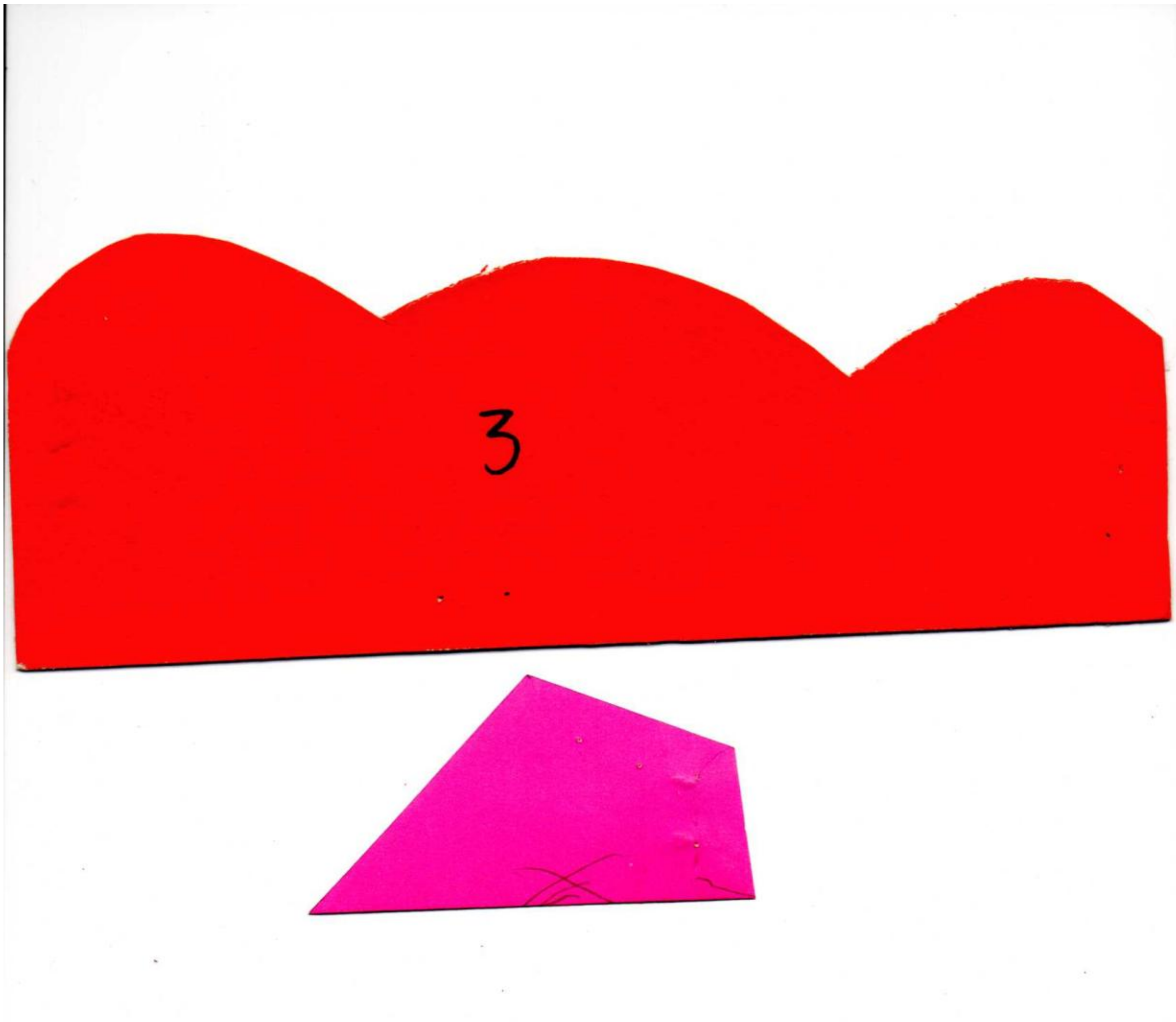
Usando los instrumentos que se te entregaron construye el triángulo que se muestra:



J



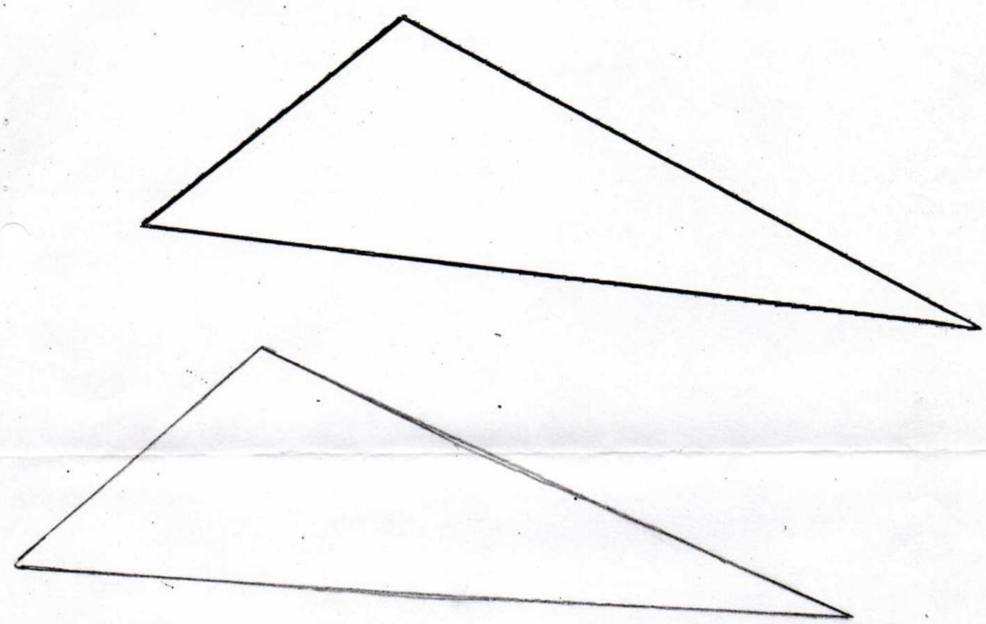
Situación 1. Ejemplo 2. Actividad 3.


3

#3

ACTIVIDAD 4

Usando los instrumentos que se te entregaron construye el triángulo que se muestra:



K

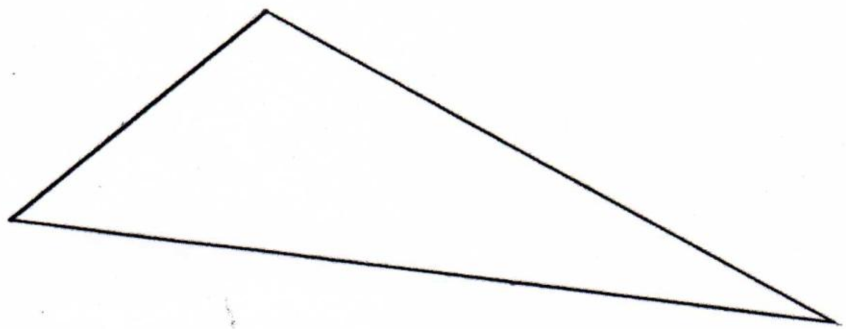
Situación 1. Actividad 4. Ejemplo 1


23

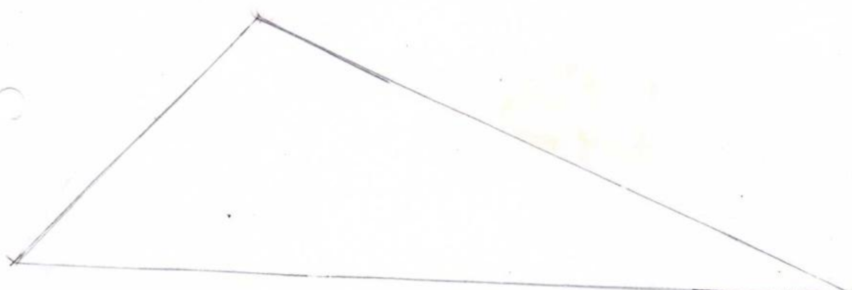
23

ACTIVIDAD 5

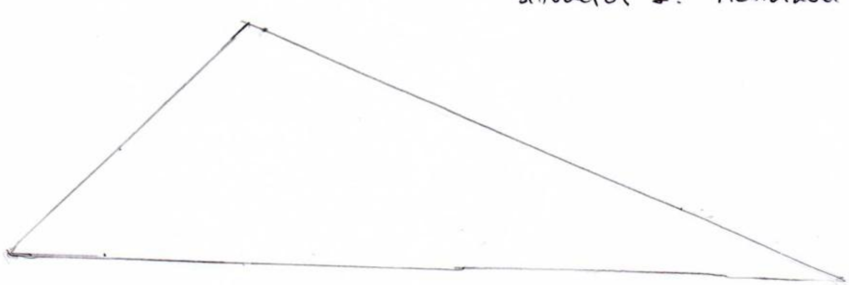
Usando los instrumentos que se te entregaron construye el triángulo que se muestra:



M



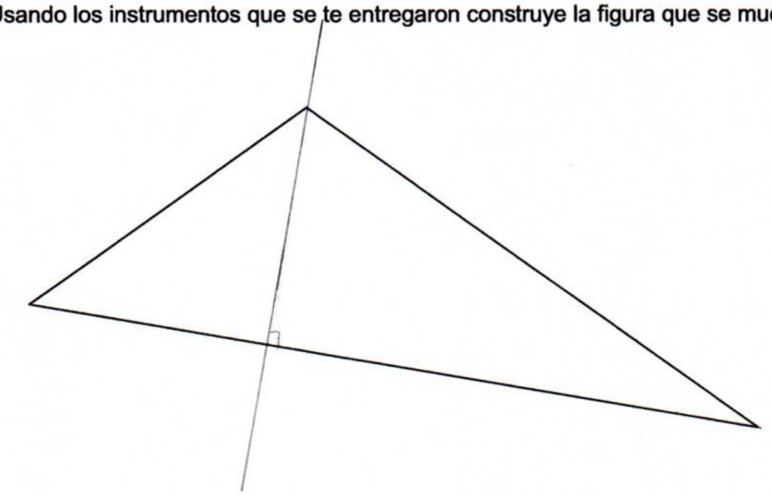
Situación 1. Actividad 5. Ejemplo 1

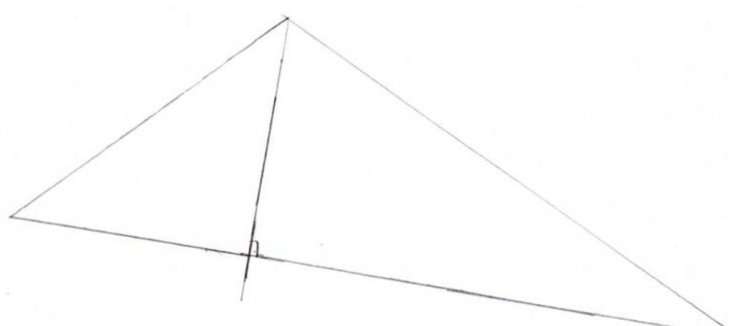


#14

SITUACIÓN 1

Usando los instrumentos que se te entregaron construye la figura que se muestra:



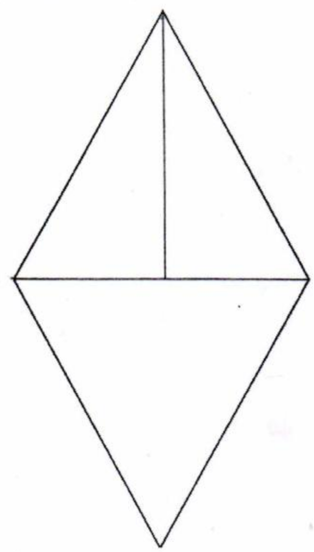


Situación 2. Actividad 1. Ejemplo 2

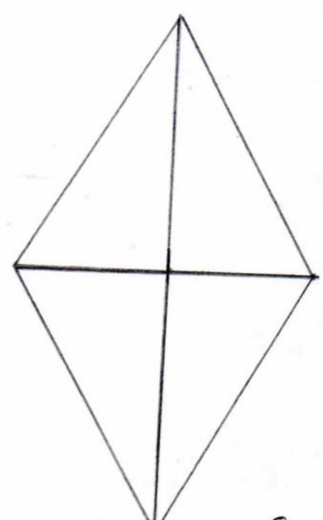
#10

SITUACIÓN 2

Usando los instrumentos que se te entregaronconstruye la figura que se muestra:



P

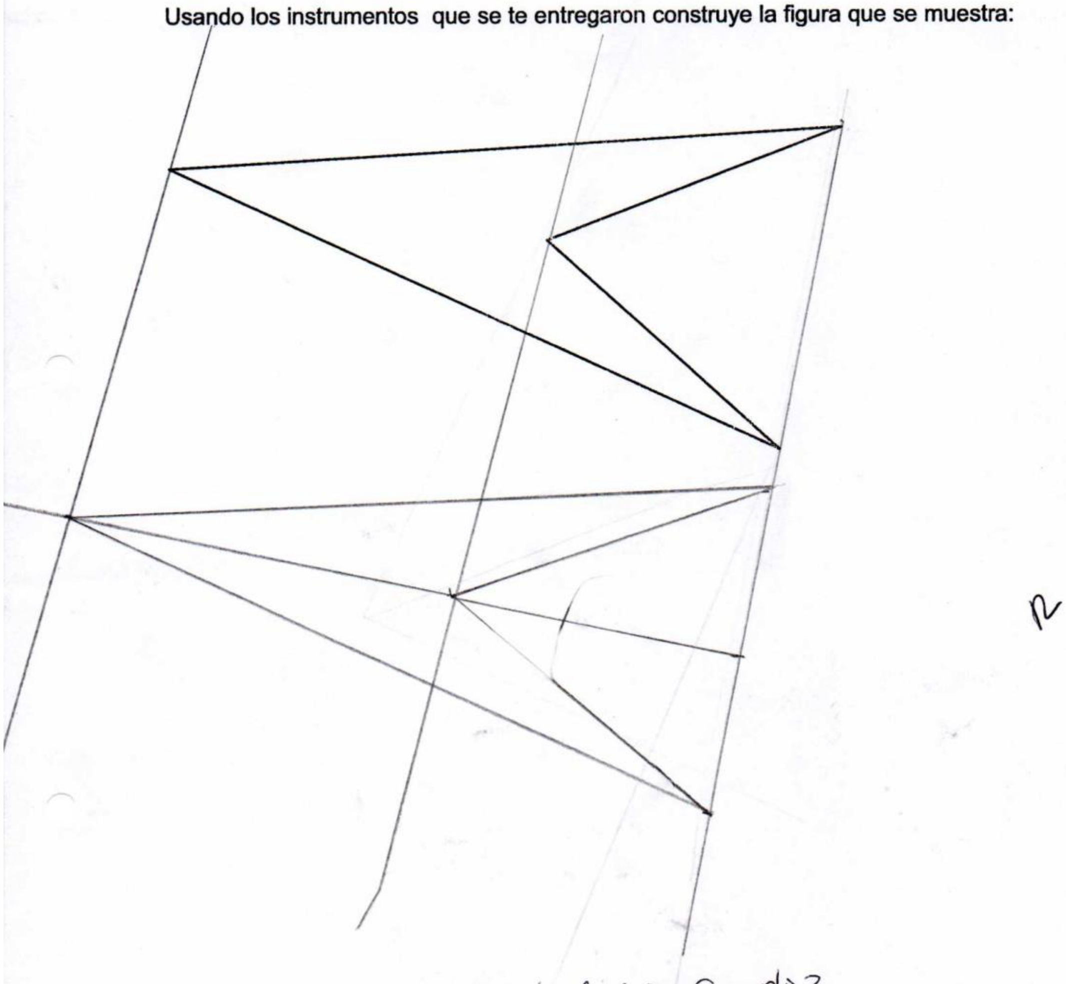


Situación 2. Actividad 2. Ejemplo 2

22

SITUACIÓN 5

Usando los instrumentos que se te entregaron construye la figura que se muestra:



Situación 2. Actividad 5. Ejemplo 2

11

SITUACIÓN: 2 CONSTRUCCIÓN DE CUADRILÁTEROS

Actividad 2 *Dibuja el mensaje*

Hoja del Descriptor

Objetivo: Debes enviarle mensajes al dibujante, en la hoja de mensajes, para que él pueda hacer un dibujo igual (mismo tamaño y misma forma) a cada una de las figuras que ves abajo.

Reglas:

- No está permitido hacer una descripción global, es decir, no puedes escribir "es como una pizza" o "es como una ventana".
- No se puede escribir el nombre de la figura, ni usar una palabra semejante.
- No se puede dibujar, solo frases en español.
- Todos los mensajes deben ser escritos en la hoja de mensajes.
- Antes de empezar a enviar los mensajes, hazle a la figura lo que consideres necesario como una ayuda para describirla. (por ejemplo, trazar líneas, nombrar las partes de la figura, etc.)

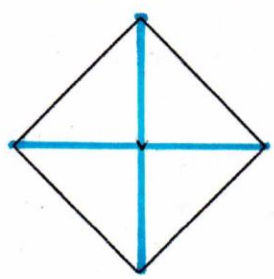


Figura 1

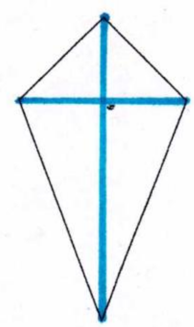


Figura 2

X

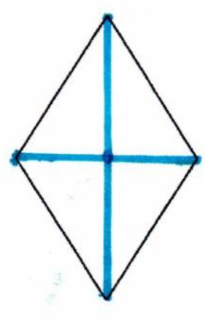


Figura 3

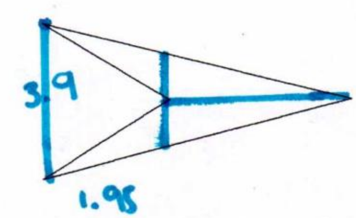


Figura 4

Situación 3. Actividad 2. Hoja 1. Ejemplo 2

Cuantas lados tiene la Figura? 4
los 4 puntos se encuentran si.

termine

has 2 puntos de 3.9cm verticales. NO LOS UNAS!

Como asi que los sepore 3.9 cm?

osea haces 2 puntos con una distancia de 3.9 cm pero solo haces los 2 puntos

y q mas?

en el cm 1.95 de entre los 2 puntos has una ~~linea~~ horizontal de 2.9 cm punto

la figura tiene 3 lados

NO. 4

Es imposible, Repetime.

lee el chat otra vez.

Je, Timi

(figura 4)

SITUACIÓN: 2 CONSTRUCCIÓN DE CUADRILÁTEROS
Actividad 2 *Dibuja el mensaje*

Hoja de Mensajes

Descriptor color AZUL 77
Dibujante color Gris 25

Dibuja una linea vertical de 5.5 cm.
y despues una linea horizontal de 3.1cm en el
cm 4 de la linea vertical.

Que mas tiene la figura?
cuatro lados -.- (figura2)

Dibuja una linea de 4.6cm vertical.
y despues una linea de 4.6 cm horizontal.
en el cm 2.5 de la linea vertical.

La linea horizontal atraviesa la
linia vertical o es toda para un
lado? La atraviesa

~~Es un~~ cuanto lados tiene? cuatro (4)
Esta conformada por 4 triangulos? No te puedo
decir.

ya termine !! !!

(figura 1)

Dibuja una line vertical de 5.1cm
y una linea horizontal de 3.4 cm en el cm 2.5
de la linea vertical

Situación 2. Actividad 2. Hoja 2. Ejemplo 2

SITUACIÓN: 2 CONSTRUCCIÓN DE CUADRILÁTEROS
Actividad 2 *Dibuja el mensaje*

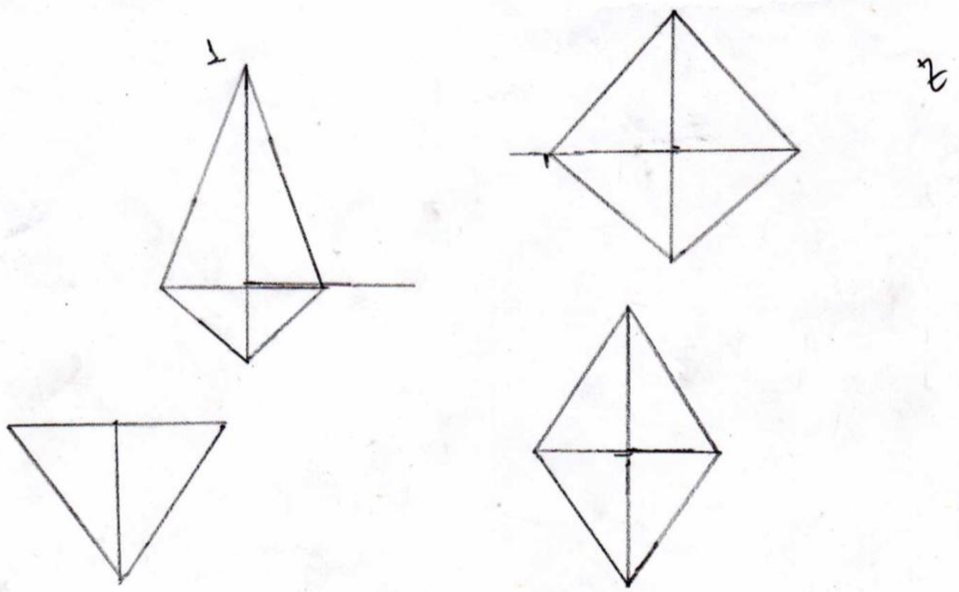
25

Hoja del Dibujante

Objetivo: usar las indicaciones que te da tu compañero para construir la figura que te describe.

Reglas:

- Dibuja con un lápiz.
- Procura no borrar los intentos realizados, sino hacer un nuevo dibujo.
- Usa tu escuadra y tu regla.
- Puedes pedir aclaración y preguntar lo que necesites, pero sólo a través de la hoja de mensajes.



Situación 3. Actividad 2. Ejemplo 2. Hoja 3

SITUACIÓN: 2 CONSTRUCCIÓN DE CUADRILÁTEROS

ACTIVIDAD 3 **la última palabra del diccionario (grupo 2)**

DESCRIPCIÓN:Se entregan dos figuras en papel a cada grupo, se realizará un sorteo de piedra, papel y tijera, para definir el grupo que inicia, el grupo que mayor acierto tenga ganará

REGLAS: No está permitido hacer una descripción global. El descriptor puede hablar con su grupo interpretador libremente sin decir el nombre de la figura, el descriptor no puede realizar dibujos, Hágale a la figura lo que considere necesario para describirla.

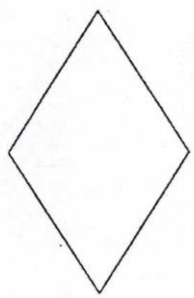


Figura 1

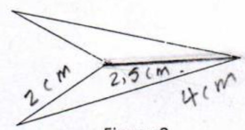


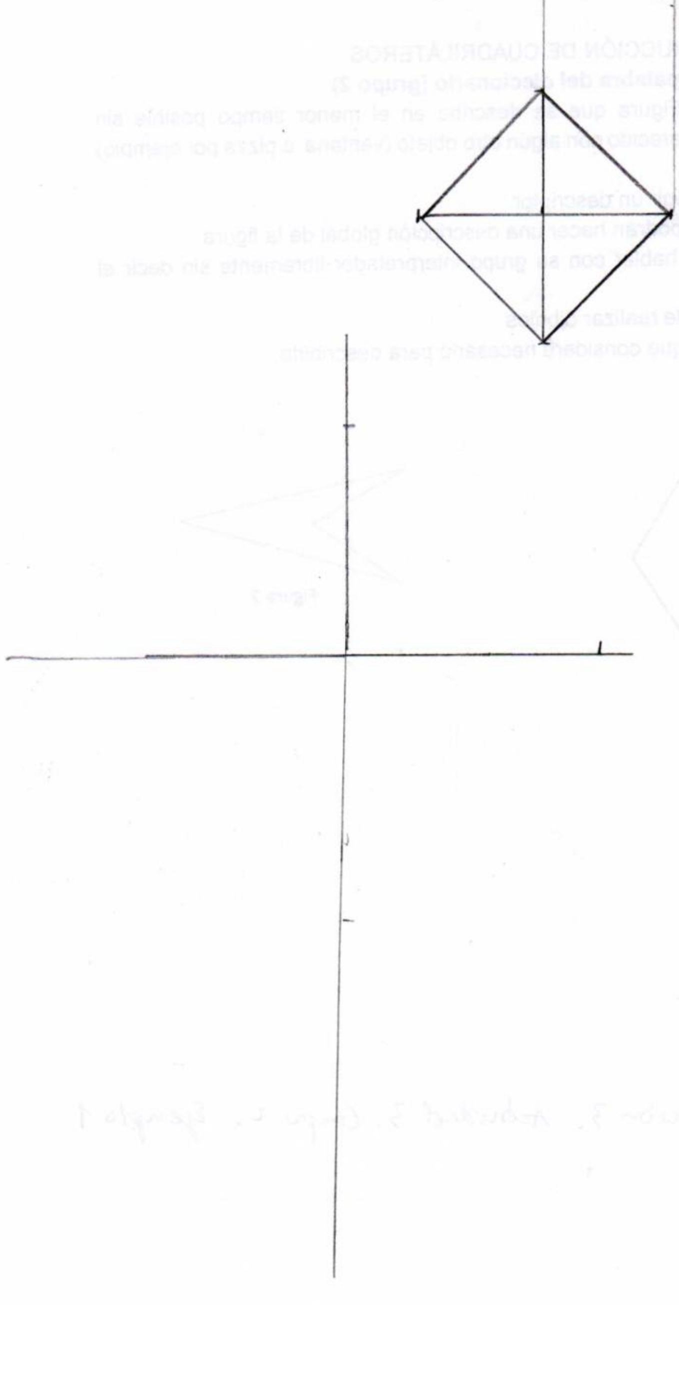
Figura 2

AA

En la explicación de las reglas, debe ser más preciso cuando afirma que no está permitido hacer una descripción global ya que esto puede generar dudas en cuanto a lo que el descriptor puede decir de la figura. Es decir, escribir que significa hacer una descripción global.

Situación 3. Actividad 3 - piloto. Seminario línea

Figura #1



SITUACIÓN: 2 CONSTRUCCIÓN DE CUADRILÁTEROS

ACTIVIDAD 3 **la última palabra del diccionario (grupo 2)**

OBJETIVO: Dibujar la Figura que se describe en el menor tiempo posible sin preguntar su nombre o parecido con algún otro objeto (ventana o pizza por ejemplo)

REGLAS:

- Cada grupo debe elegir un descriptor
- Los descriptores no podrán hacer una descripción global de la figura
- El descriptor puede hablar con su grupo interpretador libremente sin decir el nombre de la figura
- el descriptor no puede realizar dibujos
- hágale a la figura lo que considere necesario para describirla.

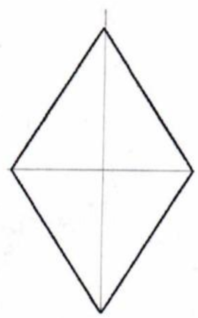


Figura 1

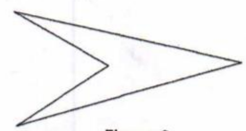
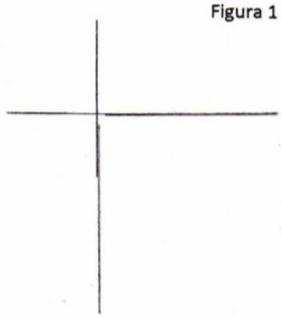


Figura 2

AB



Situación 3. Actividad 3. Grupo 2. Ejemplo 1

SITUACIÓN: 2 CONSTRUCCIÓN DE CUADRILÁTEROS
ACTIVIDAD 3 **la última palabra del diccionario (Grupo 1)**
OBJETIVO: Dibujar la Figura que se describe en el menor tiempo posible sin preguntar su nombre o parecido con algún otro objeto (ventana o pizza por ejemplo)
REGLAS:

- Cada grupo debe elegir un descriptor
- Los descriptores no podrán hacer una descripción global de la figura
- El descriptor puede hablar con su grupo interpretador libremente sin decir el nombre de la figura
- el descriptor no puede realizar dibujos
- hágale a la figura lo que considere necesario para describirla.

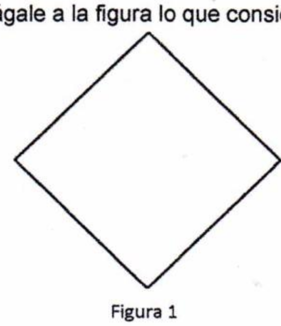
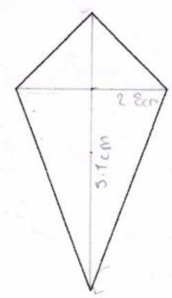


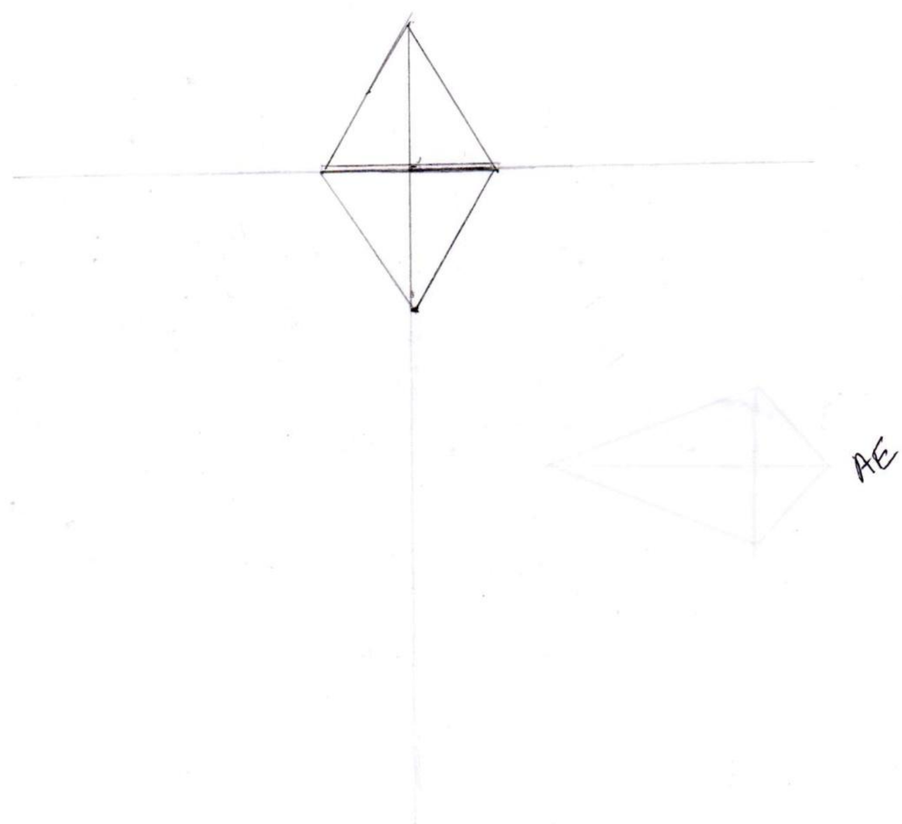
Figura 1



Fiura 2

AC

Situación 3. Actividad 3. Grupo 1. Ejemplo 1.



Situación 3. Actividad 3. Grupo 2, Ejemplo 2

ANEXO 2: Ejemplo de una bitácora para el análisis previo de los videos

La siguiente tabla resume el material video grabado

Situación	Sesiones	Videos	Estudiantes
1	Dos	67 (111 minutos)	20
2	Dos	25 (42 minutos)	20
3	Una	6 (25 minutos)	20

Para su análisis se siguió el siguiente protocolo: definir una bitácora (descripción general) de lo que contenía cada video; a partir de esta se seleccionaban los videos que fueran interesantes según el tópico en análisis, finalmente sobre los video seleccionados se hacía un análisis basado en un rejilla o se hacían transcripciones y narraciones de los momentos relevantes de los mismos.

Video	Actividad	Descripción
Video HDV_0248	Actividad 1	* Explicación estudiante 11(min 0 a seg 22), explicación estudiante 3(seg 30 a 43). * Problemas de construcción (seg 44 a min 2:57) estudiante 18 (usa un compas) * Socialización actividad 1(min 3 a min 5:50) * Comprobación del profesor en el tablero (min 3:51 a min 7:00) * Presentación del nombre del instrumento de la actividad 1 molde) (min 7 a min 7 30) * Comportamiento social (min 7:33 a min 8:07)
Video HDV_0253	Actividad 2	Explicación estudiante 6(min 0 a 1:50) uso inadecuado de los instrumentos
Video HDV_0257	Actividad 2	*construcción estudiante 23 (min 0 a seg 25) *explicación estudiante 9 (seg 33 a 44
Video HDV_0258	Actividad 2	*explicación estudiante 18 (hablan del color del instrumento) (problemas de comprensión) (min 0 a 2:50)
Video HVC_0262	Actividad 2	Relaciones en clase (min o a seg 20) (juegos de esconder pertenencias) *Construcción estudiante 1(seg 43 a min 1:15) * construcción estudiante 7(min 1:20 a 1:48) * construcción estudiante 9(min 2:05 a min 2:22) * construcción estudiante 11(min 2:25 a min 2:40) *Ayuda entre estudiantes (6)](min 2:50 a min 3:26)
Video SAM_1672	actividad 1	Construcción estudiante 8 (min 0 a min 1)
Video SAM_1673	actividad 1	Explicación estudiante 22
Video SAM_1674	actividad 1	Construcción estudiante 7
Video SAM_1675	actividad 1	Explicación estudiante 6
Video SAM_1676	actividad 1	Explicación estudiante 13

ANEXO 3: Ejemplo de rejilla de análisis de videos

DESCRICIÓN DE VIDEOS PARA REJILLA DE ANALISIS DE LOS VIDEOS												
SITUACIÓN 1	NOMBRE DEL VIDEO	RESPECTO AL USO LA HERRAMIENTA					RESPECTO A LA FIGURA RESPECTO AL INSTRUMENTO			VISUALIZACION Y FORMA DE VER / DESCONTRUCCION DIMENSIONAL		
		Ez	USA EL TOTAL DE HERRAMIENTAS	LO QUE SE ESPERABA	NO SE ESPARABA	ES DIFERENTE "CURIOSIDADES" DEL USO DE LA HERRAMIENTA	RELACIONES DE ANGULOS	RELACION DE LADOS	LOGRA LA RECONSTRUCCION	CAMBIOS DE FIGURA DADA EN EL PROCESO DE CONSTRUCCIÓN	PROLONGACION DE LINEAS	CONSTRUCCION DE NUEVAS LINEAS
ACTIVIDAD 1 MOLDE ROTO	S1A1V1	E22	X	N	X	N	N	X	X	N	N	N
	S1A1V1	E19	X	N	X	X1	N	N	N	N	N	N
	S1A1V1	E	X	N	X	N	N	X	X	N	N	N
	S1A1V1	E13	X	N	N	X1	N	X	X	N	N	N
	S1A1V2	E22	X	X	N	N	X	X	X	X	X	X
	S1A1V3		X	N	N	N	N	X	N	N	N	N
	S1A1V4	E6	X	N	X	N	N	X	X	N	N	N
	S1A1V5	E13	X	N	X	X3	N	X	X	N	N	N
	S1A1V6	E11	X	X	X	N	N	N	X	N	N	N
	S1A1V6	E3	X	N	X	N	N	X	X	N	N	N
	S1A1V6	E18	X	N	X	N	N	X	X	N	N	N
	S1A1V6 ESTUDIANTE LO HACE EN EL TABLERO	N/A	X	X	N	N	X	X	X	N	N	N
	S1A1V6 PRO GALEANO LO EXPLICA TABLERO	PRO	X	X	N	N	X	X	X	N	N	N
	S1A1V7	E8	X	N	X	N	N	N	X	N	N	N

DESCRICIÓN DE VIDEOS PARA REJILLA DE ANALISIS DE LOS VIDEOS												
SITUACIÓN 1	NOMBRE DEL VIDEO	RESPECTO AL USO LA HERRAMIENTA					RESPECTO A LA FIGURA RESPECTO AL INSTRUMENTO			VISUALIZACION Y FORMA DE VER / DESCONTRUCCION DIMENSIONAL		
		Ex	USA EL TOTAL DE HERRAMIENTAS	LO QUE SE ESPERABA	NO SE ESPARABA	ES DIFERENTE "CURIOSIDADES" DEL USO DE LA HERRAMIENTA	RELACIONES DE ANGULOS	RELACION DE LADOS	LOGRA LA RECONSTRUCCION	CAMBIOS DE FIGURA DADA EN EL PROCESO DE CONSTRUCCIÓN	PROLONGACION DE LINEAS	CONSTRUCCION DE NUEVAS LINEAS
ACTIVIDAD 2	S1A2V3	E7	X	N	XM	N	N	N	N	N	N	N
	S1A2V4	E23	X	X	N	N	X	X		N	N	N
	S1A2V5	E25	X	N	N	N	N	N	?	N	N	N
	S1A2V6	E6	X	X	N	N	N	X	X	N	N	N
	S1A2V7	E23	X	N	X	X	X	X	N	N	N	N
	S1A2V8 el mismo del 5 y 6	E18	X	XM	N	X	N	X	X?	N	N	N
	S1A2V9	E23	X	X	N	N	X	X	X	N	N	N
	S1A2V9	E9	X	X	N	N	X	X	X	N	N	N
	S1A2V11	E16	X	X	N	N	X	X	X	N	N	N
	S1A2E1 EN TABLERO	N/A	X	XM	N	N	X	X	XM	N	N	N
	S1A2E2ENTABLERO	N/A	X	X	N	N	N	N	X	N	N	N
	S1A2E3ENTABLERO	N/A	X	N	X	X	X	X	X	X	X	N

DESCRIPCIÓN DE VIDEOS PARA REJILLA DE ANALISIS DE LOS VIDEOS												
SITUACIÓN 1	NOMBRE DEL VIDEO	RESPECTO AL USO LA HERRAMIENTA					RESPECTO A LA FIGURA RESPECTO AL INSTRUMENTO			VISUALIZACION Y FORMA DE VER / DESCONTRUCCION DIMENSIONAL		
		Ex	USA EL TOTAL DE HERRAMIENTAS	LO QUE SE ESPERABA	NO SE ESPARABA	ES DIFERENTE "CURIOSIDADES" DEL USO DE LA HERRAMIENTA	RELACIONES DE ANGULOS	RELACION DE LADOS	LOGRA LA RECONSTRUCCION	CAMBIOS DE FIGURA DADA EN EL PROCESO DE CONSTRUCCIÓN	PROLONGACION DE LINEAS	CONSTRUCCION DE NUEVAS LINEAS
ACTIVIDAD 3	S1A3V1	E5	N	N	XB	XB	X	X	X	N	N	N
	S1A3V2	E1	X	X	N	N	X	X	X	N	N	N
	S1A3V2	E7	X	X	N	N	X	X	X	N	N	N
	S1A3V2	E6	X	X	N	N	X	X	X	N	N	N
	S1A3V3	E14	N	N	XB	XB	X	X	X	X	X	X
	S1A2E1CONSTRUYE ENTABLERO	N/A	X	X	N	N	X	X	X	X	N	X

DESCRICIÓN DE VIDEOS PARA REJILLA DE ANALISIS DE LOS VIDEOS												
SITUACIÓN 1	NOMBRE DEL VIDEO	RESPECTO AL USO LA HERRAMIENTA					RESPECTO A LA FIGURA RESPECTO AL INSTRUMENTO			VISUALIZACION Y FORMA DE VER / DESCONTRUCCION DIMENSIONAL		
		Ex	USA EL TOTAL DE HERRAMIENTAS	LO QUE SE ESPERABA	NO SE ESPARABA	ES DIFERENTE "CURIOSIDADES" DEL USO DE LA HERRAMIENTA	RELACIONES DE ANGULOS	RELACION DE LADOS	LOGRA LA RECONSTRUCCION	CAMBIOS DE FIGURA DADA EN EL PROCESO DE CONSTRUCCIÓN	PROLONGACION DE LINEAS	CONSTRUCCION DE NUEVAS LINEAS
ACTIVIDAD 4	S1A4V1	E20	X	X	N	N	X	X	X	N	N	N
	S1A4V1	E11	X	X	N	N	X	X	X	N	N	N
	S1A4V3	E26	X	N	X	N	X	X	X	N	N	N
	S1A4V4	E12	X	X	N	N	X	X	X	N	N	N
	S1A4V5	E12	X	X	N	N	X	X	X	N	N	N
	S1A4V6El mismo que el video s1a4v1 en el minuito 2:34 explicacion	E11	X	N	XB	XB	X	X	X	X	X	X
	S1A4V7	E1	X	N	XB	XB	X	X	X	X	X	X
	S1A4V8 EL MISMO QUE V3		X	N	X	N	X	X	X	N	N	N
	S1A4V9	E3	X	N	X	N	X	X	X	N	N	N
	S1A4V10	E5	N	N	XB	XB	X	X	X	X	X	X
	S1A4V11	E8	X	N	XB	XB	X	X	X	X	X	X
	S1AE1 CONSTRUYE TRIANGULO CON 2 HERRAMIENTAS EN TABLERO		X	N	X	X?	N	X	X	N	N	N

DESCRIPCIÓN DE VIDEOS PARA REJILLA DE ANALISIS DE LOS VIDEOS												
SITUACIÓN 1	NOMBRE DEL VIDEO	RESPECTO AL USO LA HERRAMIENTA					RESPECTO A LA FIGURA RESPECTO AL INSTRUMENTO			VISUALIZACION Y FORMA DE VER / DESCONTRUCCION DIMENSIONAL		
		Ex	USA EL TOTAL DE HERRAMIENTAS	LO QUE SE ESPERABA	NO SE ESPARABA	ES DIFERENTE "CURIOSIDADES" DEL USO DE LA HERRAMIENTA	RELACIONES DE ANGULOS	RELACION DE LADOS	LOGRA LA RECONSTRUCCION	CAMBIOS DE FIGURA DADA EN EL PROCESO DE CONSTRUCCIÓN	PROLONGACION DE LINEAS	CONSTRUCCION DE NUEVAS LINEAS
ACTIVIDAD 5	S1A5V1	E5	N	N	XB	XB	XB	XB	XB	X	X	N
	S1A5V2	E22	N	N	XB	XB	X	X	X	X	X	X
	S1A5V3	E10	N	N	XB	XB	X	X	X	X	X	X
	S1A5V4	E6	XM	N	XM	XM	XM	XM	XM	X	X	X
	S1A5V5	E12	N	N	XM	XM	N	N	XM	?	?	?
	S1A5V6	E26	N	N	XB	XB	X	X	X	X	X	X
	S1A5V7	E26	N	N	XB	XB	X	X	X	X	X	X
	S1A5V8	E1										
	S1A5V9	E11	XM	N	X?	X	N	X	X	?	?	?
	S1A5V10	E15	XM	N	X	X	X?	X	X	?	?	?
	S1A5V11	E21										
	S1A5V12	E16	N	N	XB	XB	X	X	X	X	X	X
	S1A5 E1ENTABLERO	N/A	X	X	N	N	X	X	X	X	X	X
	S1A5 PRUEBA DEL ANGULO 1	E25	NO APLICA									
	S1A5 PRUEBA DEL ANGULO 2	E9										
	S1A5 PRUEBA DEL ANGULO 3	E18										

DESCRICIÓN DE VIDEOS PARA REJILLA DE ANALISIS DE LOS VIDEOS												
SITUACIÓN 2	NOMBRE DEL VIDEO	DESCRIPCIÓN DEL VIDEO	RESPECTO AL USO LA HERRAMIENTA				RESPECTO A LA FIGURA RESPECTO AL INSTRUMENTO			VISUALIZACION Y FORMA DE VER / DESCONTRUCCION DIMENSIONAL		
		Ex	USA EL TOTAL DE HERRAMIENTAS	LO QUE SE ESPERABA	NO SE ESPARABA	ES DIFERENTE "CURIOSIDADES" DEL USO DE LA HERRAMIENTA	RELACIONES DE ANGULOS	RELACION DE LADOS	LOGRA LA RECONSTRUCCION	CAMBIOS DE FIGURA DADA EN EL PROCESO DE CONSTRUCCIÓN	PROLONGACION DE LINEAS	CONSTRUCCION DE NUEVAS LINEAS
ACTIVIDAD 1	S2A1V1	SIN	X	X	N	N	X	X	X	X	N	X
	S2A1V2	E22	X	X	N	N	X	X	X	X	N	X
	S2A1V3	E14	X	X	N	N	X	X	X	X	N	X
	S2A1V4	E11	X	X	N	N	X	X	X	X	N	X
	S2A1V5	E23	X	X	N	N	X	X	X	X	N	X

DESCRICIÓN DE VIDEOS PARA REJILLA DE ANALISIS DE LOS VIDEOS														
SITUACIÓN 2	NOMBRE DEL VIDEO	FECHA DE LA CREACIÓN	Ex	RESPECTO AL USO LA HERRAMIENTA					RESPECTO A LA FIGURA RESPECTO AL INSTRUMENTO			VISUALIZACION Y FORMA DE VER		
				TIPO DE HERRAMIENTA		USA EL TOTAL DE HERRAMIENTAS	NO SE ESPARABA	ES DIFERENTE "CURIOSIDADES" DEL USO DE LA HERRAMIENTA	RELACIONES DE ANGULOS	RELACION DE LADOS	LOGRA LA RECONSTRUCCION	CAMBIOS DE FIGURA DADA EN EL PROCESO DE CONSTRUCCIÓN	DESCONTRUCCION DIMENSIONAL	
				ESCUADRA	REGLA								PROLONGACION DE LINEAS	CONSTRUCCION DE NUEVAS LINEAS
ACTIVIDAD 2	S2A2V1	01/12/2014	E1	X	X	N	X	N	X	X	X	X	N	X
	S2A2V1.1 El mismo Video S2A2V1	01/12/2014	E1	X	X	N	X	N	X	X	X	X	N	X
	S2A2V2	01/12/2014	E12	N	X	N	X	N	X	X	X	X	N	X
	S2A2V3	01/12/2014	E14	X	X	X	X	N	X	X	X	X	N	X
	S2A2V4	01/12/2014	E25	X	X	X	N	N	N	N	N	X	N	X
	S2A2V5	01/12/2014	E13	N	X	N	N	N	N	X	N	X	N	X
	S2A2V6	01/12/2014	E13	N	X	N	N	N	N	X	N	X	N	X
	S2A2V7	01/12/2014	E22	N	X	N	N	X	N?	N?	X	X	N	X
	S2A2V8	01/12/2014	E21	X	X	X	N	X	X	X	X	X	N	X

DESCRICIÓN DE VIDEOS PARA REJILLA DE ANALISIS DE LOS VIDEOS														
SITUACIÓN 2	NOMBRE DEL VIDEO	FECHA DE LA CREACIÓN	Ex	RESPECTO AL USO LA HERRAMIENTA					RESPECTO A LA FIGURA RESPECTO AL INSTRUMENTO			VISUALIZACION Y FORMA DE VER		
				TIPO DE HERRAMIENTA		USA EL TOTAL DE HERRAMIENTAS	NO SE ESPARABA	ES DIFERENTE "CURIOSIDADES" DEL USO DE LA HERRAMIENTA	RELACIONES DE ANGULOS	RELACION DE LADOS	LOGRA LA RECONSTRUCCION	CAMBIOS DE FIGURA DADA EN EL PROCESO DE CONSTRUCCIÓN	DESCONTRUCCION DIMENSIONAL	
				ESCUADRA	REGLA								PROLONGACION DE LINEAS	CONSTRUCCION DE NUEVAS LINEAS
ACTIVIDAD 5	S2A5V1	24/11/2014	E14	X	X	X	X	X	X	X	?	X	X	X
	S2A5V2	24/11/2014	E1	X	X	X	X	X	?	?	?	X	X	X
	S2A5V3	24/11/2014	SIN	?	?	?	?	?	?	?	?	x	x	x
	S2A5V4	24/11/2014	SIN	N	X	N	X	N	N	N	N	N	N	N
	S2A5V5	24/11/2014	SIN	?	?	?	X	X	X	X	X	X	N	N
	S2A5V6	24/11/2014	E7	X	N	N	X	X	N	X	N	N	N	N
	S2A5V7	24/11/2014	E9	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	S2A5V8	24/11/2014	E11	N	X	N	X	X	X	X	X	X	N	X
	S2A5V9	24/11/2014	E21	N	X	N	X	X	N	X	?	X	N	X

ANEXO 4. Ejemplo de Transcripciones

Descripción videos situación 1 actividades 1, 2, 3, 4 y 5

Fuente: video HDV_0253
Conversación:
E: lo puse aquí para hacer la primera parte y me quedara igual, luego cogí esta cosita para medir el tamaño, como se necesitaba, luego lo medí y ya.
P: ¿hiciste el mismo trazo y el otro lo mediste y pusiste la marca en el que estabas dibujando?
E: si
P: pero te quedó el ángulo más pequeño ¿sabes porque?
E: no
P: porque no tomaste en cuenta el ángulo de la figura, te fijaste solo en la línea y no en el ángulo, esa es por la razón la cual te queda más pequeño el ángulo de tu dibujo.
(El estudiante número 6 en este video muestra cómo construir un triángulo utilizando como plantilla el molde roto del triángulo, posterior a ello ubica los dos moldes rotos sobre la figura, primero el molde que contiene un ángulo y luego la que contiene dos ángulos y un lado completo dado e intenta reproducirla idénticamente)

Fuente: video HDV_0258
Conversación:
P: ¿qué hiciste?
E: cogí las dos figuras y las medí al otro lado y la trace
P: explícame como lo hiciste, vuélvelo hacer yo lo miro
E: esta la medí aquí y la trace y la otra aquí… no me da ya la figura!!!
P: piénsalo un rato de cómo lo hiciste.
(El estudiante número 18 en esta actividad manifiesta elaborar la construcción tomando cada molde roto haciendo los trazos individuales, de esta manera muestra como superpone los moldes sobre la figura inicial, cuando argumenta con el profesor y reelaborar la figura imagen que hizo manifestó que ya no le cuadraba)

Fuente: video HDV_0259
Conversación:
P: explica en el tablero como lo hiciste
E: junte las dos fichas y trace las líneas para dar con la figura.
El estudiante en este video presenta su construcción en el tablero a petición del profesor de clase (Gráfica 10), posterior a ello el estudiante realiza los trazos con las moldes explicando su proceso de llegar a la figura imagen del triángulo dado.

Fuente: video HDV_0260
Conversación:
P: Muestra en el tablero como lo hiciste
E: medí las dos figuras juntas, luego las separe y las dibuje

(La estudiante para esta actividad de reproducción de un triángulo dado, argumenta en el tablero a toda el curso como fue su proceso y manejo de moldes rotos para llegar a la figura imagen del triángulo dado, donde posterior a ello menciona una relación entre ángulos que se pueden copiar de los moldes. Para las situaciones de aula como pregunta introductoria se utilizó en todos los casos ¿Cómo hiciste la figura?)
E: Yo puse esta y le trace todos los lados, y a base de esto le trace las dos líneas para terminar acá
El estudiante en el ejercicio de la situación plantea que hace su figura imagen con rayas y trazos lineales.
345v (6)
E: Pienso que esta da perfecto, también seria acá
En este momento en la construcción de la figura (triangulo) el estudiante manifiesta poder encajar las plantillas que se dieron para el uso de la construcción del triángulo dado.

Fuente: Video: 345v (7)
Conversación:
E: Yo vi que este cabía acá, yo hice las medidas. (Coloca la plantilla sobre la figura y coloca marcas sobre ella)
P: ¿Cuáles medidas?
E: los puntos, luego trace las líneas
(Para esta actividad el estudiante manifiesta ver las plantillas con la función de encajar para hacer una copia de la figura inicial, donde posterior a ello toma los puntos, que en este caso son los vértices del triángulo, de tal manera que al proyectarlos pueda generar la figura dada)

Fuente: Video A345V (20). Actividad 5
Conversación:
E: Primero la calcule acá, luego vi la altura poniéndola así poniéndole los puntos, entonces la calculaba así y aquí, luego la bajaba y luego la ponía así y la ponía así y me quedo.
El estudiante para esta situación utiliza las plantillas entregadas para la construcción como escuadras, donde posterior a ello toma la altura del triángulo inicial con la plantilla como insumo para generar la figura imagen (Gráfica 13).
Con este procedimiento muestra que toma elementos de propiedad del triángulo y le da un uso a las herramientas con desplazamientos de escuadras de tal manera que logra encajar las líneas (lados) del triángulo.

Fuente: video A345V (30)
El estudiante da explicación de su proceso de construcción donde menciona que traslada los puntos (vértices) del triángulo donde posterior a ello traza las líneas de tal manera que hace coincidir los ángulo
Conversación:
E: Hice estas líneas así, que me dicen que es como la distancia del triángulo, y luego puse esta donde el espaciesito del ángulo, y con esto hice que la línea me cupiera de aquí hasta acá.
P: ¿Y cómo mediste este ángulo?

E: Medí aquí, desde aquí acá, y luego fui buscándole como de aquí si me daba y me cuadro acá.
P: ¿Y cómo mediste este ángulo de acá?
E: No pues, baje del puntico de acá un poquito y luego lo uní con la medida de acá.
El estudiante N° 16 argumenta que para la construcción de la figura imagen hace proyección de puntos vértice donde menciona hacer coincidencia de ángulos con los trazos hechos por los puntos proyectados. Muestra que los ángulos se forman después de haber marcado el punto y un trazo con la regla informativa evidenciando la unión de trazos para la formación de la amplitud angular.

Fuente: Video: 20141001_132204
En este video la estudiante menciona utilizar una entrada de la figura que corresponde a una parte irregular de la superficie cualquiera que se entregó para la construcción de la figura inicial (Triángulo).
Conversación:
E: eh yo cogí, y cogí esta cosita de aquí, lo medí.
P: ¿Cual cosito?
E: esta entrada, lo puse así, lo acomode
P: hiciste alguna marca
E: No. Lo baje así, lo dibuje igualito, después como me di cuenta que este lado era recto y comenzaba desde acá, la dibuje hasta arriba la deje así y después medí y ya
P: ¿Y este trazo como lo hiciste?
E: Lo medí
P: Y ahí si hiciste marca
E: aja
El estudiante en esta situación manifiesta utilizar el ángulo para el inicio de la construcción utilizando las dos plantillas entregadas, valiéndose de la seguridad que al bajar las plantillas copia el ángulo que tiene la figura inicial, posterior a ello hace los trazos de los lados haciéndoles marcas a las plantilla.

Fuente: Video: 2141001_133912
El estudiante en este video manifiesta “poner acá” la superficie cualquiera sobre la imagen del triángulo dado que hay que construir (Gráfica 16), de manera que a la superficie le hace marcas para posterior a ello sobre esas marcas hacer otras marcas y realizar los trazos que permitirán la construcción del triángulo dado.
Conversación:
P: Como hiciste la figura
E: eh la puse acá y marque acá, acá y acá y en la otra lo dibujamos y así lo hice
El estudiante en esta situación manifiesta realizar marcas sobre las plantillas de tal forma que con las marcas justifica puntos que darán paso a la construcción. *Estos puntos son los que a su vez dan garantía del ángulo.* El estudiante a raves de su argumentación justifica y comprueba que al marcar la superficie tiene los elementos suficientes para generar trazos 1D que formar el contorno de la figura dada.